■ In sintesi.

Per semplificare un radicale:

- determiniamo le C.E. e il segno;
- semplifichiamo l'indice di radice e l'esponente del radicando per lo stesso numero;
- controlliamo che il risultato abbia le stesse C.E. e lo stesso segno. Se è necessario, scriviamo il radicando in valore assoluto.

Dopo aver posto le condizioni di esistenza, semplifica i seguenti radicali, se è possibile.

305 $\sqrt[10]{(x-5)^8}$; $\sqrt[4]{(1-x)^2}$. $\left[\sqrt[5]{(x-5)^4}; \sqrt{|1-x|}\right]$

306 $\sqrt[6]{(x-7)^3}$; $\sqrt[25]{(x+2)^{15}}$. $\left[x \geq 7: \sqrt{x-7}; \sqrt[5]{(x+2)^3}\right]$

307 $\sqrt[3]{125x^9}$; $\sqrt[4]{(x^2+4)^2}$. $\left[5x^3; \sqrt{x^2+4}\right]$

308 $\sqrt[12]{(x+4)^4}$; $\sqrt[5]{32y^{10}}$. $\left[\sqrt[3]{|x+4|}; 2y^2\right]$

309 $\sqrt[10]{(3+x^4)^5}$; $\sqrt[3]{-8a^6}$. $\left[\sqrt{3+x^4}; -2a^2\right]$

310 $\sqrt{x^4}$; $\sqrt{9x^2}$. $\left[x^2; 3|x|\right]$

311 $\sqrt[8]{(a^2+16)^2}$; $\sqrt[4]{16x^2}$. $\left[\sqrt[4]{a^2+16}; 2\sqrt{|x|}\right]$

312 $\sqrt{x^2y^4}$; $\sqrt[3]{x^{15}}$. $\left[|x|y^2; x^5\right]$

313 $\sqrt{4a^6}$; $\sqrt[3]{27a^9}$. $\left[2|a^3|; 3a^3\right]$

314 $\sqrt[8]{81a^4}$; $\sqrt[10]{(b+1)^5}$. $\left[\sqrt{3|a|}; b \geq -1: \sqrt{b+1}\right]$

315 $\sqrt[4]{a^8}$; $\sqrt{a^{12}}$. $\left[a^2; a^6\right]$

316 $\sqrt[6]{x^8}$; $\sqrt[6]{(x^2+1)^3}$. $\left[\sqrt[3]{x^4}; \sqrt{x^2+1}\right]$

317 $\sqrt[12]{a^6x^4}$; $\sqrt[4]{(x-3)^2}$. $\left[\sqrt[6]{|a|^3x^2}; \sqrt{|x-3|}\right]$

318 $\sqrt[9]{(x+1)^3y^3}$; $\sqrt[16]{(a-1)^4}$. $\left[\sqrt[3]{(x+1)y}; \sqrt[4]{|a-1|}\right]$

319 $\sqrt{4x^2-4x+1}$; $\sqrt[4]{a^2+10a+25}$. $\left[|2x-1|; \sqrt{|a+5|}\right]$

PIT STOP — **5 RADICALI LETTERALI IN PIÙ**

Vuoi vedere subito se il passaggio è giusto o sbagliato? Vai sul Tutor e fai l'esercitazione con il Checker.

TUTOR matematica — **http://su.zanichelli.it/tutor** risorsa riservata a chi ha acquistato l'edizione con Tutor

320 $\sqrt[8]{(3a-2)^4}$; $\sqrt{1-2a^2+a^4}$. $\left[\sqrt{|3a-2|}; |1-a^2|\right]$

321 $\sqrt[6]{4a^2}$; $\sqrt[8]{x^4+10x^2+25}$. $\left[\sqrt[3]{2|a|}; \sqrt[4]{x^2+5}\right]$

322 $\sqrt{64a^2y^4}$; $\sqrt[3]{64a^6}$. $\left[8|a|y^2; 4a^2\right]$

323 $\sqrt[6]{x^3-3x^2+3x-1}$ $\left[\sqrt{x-1} \text{ se } x \geq 1\right]$

324 $\sqrt[9]{x^3(a-1)^3}$ $\left[\sqrt[3]{x(a-1)}\right]$

325 $\sqrt[4]{x^8(2x-4)^6}$ $\left[\sqrt{x^4|2x-4|^3}\right]$

326 $\sqrt[15]{(a-2)^3(b+1)^6}$ $\left[\sqrt[5]{(a-2)(b+1)^2}\right]$

327 $\sqrt[6]{\dfrac{x^{12}y^2}{(a^2+1)^6}}$ $\left[\sqrt[3]{\dfrac{x^6|y|}{(a^2+1)^3}}\right]$

328 $\sqrt[8]{a^4x^8}$ $\left[\sqrt{|a|}x^2\right]$

329 $\sqrt[4]{\dfrac{y^2-4y+4}{4y^4}}$ $\left[\sqrt{\dfrac{|y-2|}{2y^2}} \text{ se } y \neq 0\right]$

330 $\sqrt[6]{\dfrac{x^2+2x+1}{(y^2+1)^4}}$ $\left[\sqrt[3]{\dfrac{|x+1|}{(y^2+1)^2}}\right]$

331 **CACCIA ALL'ERRORE**

a. $\sqrt[3]{x^3+a^3} = x+a$ b. $\sqrt[4]{4-x^4} = \sqrt{2-x^2}$ c. $\sqrt[6]{36a^2x^6} = \sqrt[3]{6ax^3}$ d. $\sqrt{(4x-1)^2} = 4x-1$

RIDUZIONE DI RADICALI ALLO STESSO INDICE

→ Teoria a pagina **746**

COME SI FA

► **Riduciamo allo stesso indice: a.** $\sqrt[3]{9}, \sqrt{6}, \sqrt[6]{8}$; **b.** $\sqrt[4]{x}, \sqrt[3]{2x^2}, \sqrt[6]{3x^3}$.

a. Trasformiamo i radicali in radicali equivalenti applicando la proprietà invariantiva; scegliamo come indice il mcm degli indici: $\text{mcm}(3; 2; 6) = 6$.

$$\sqrt[3]{9} = \sqrt[6]{9^2} = \sqrt[6]{81}; \quad \sqrt{6} = \sqrt[6]{6^3} = \sqrt[6]{216}; \quad \sqrt[6]{8}.$$

b. Determiniamo le condizioni di esistenza, mettendo a sistema le condizioni di tutti e tre i radicali.

C.E.: $x \geq 0$.

Calcoliamo il mcm tra gli indici: $\text{mcm}(4; 3; 6) = 12$.

$$\sqrt[4]{x} = \sqrt[12]{x^3}; \quad \sqrt[3]{2x^2} = \sqrt[12]{2^4x^8} = \sqrt[12]{16x^8}; \quad \sqrt[6]{3x^3} = \sqrt[12]{3^2x^6} = \sqrt[12]{9x^6}.$$

Riduci i seguenti radicali allo stesso indice, dopo aver posto le condizioni di esistenza.

332 $\sqrt{2}; \quad \sqrt[4]{8}.$

333 $\sqrt[6]{10}; \quad \sqrt[9]{6}.$

334 $\sqrt[12]{48}; \quad \sqrt[6]{12}; \quad \sqrt[3]{3}.$

335 $\sqrt[4]{6}; \quad \sqrt[8]{18}; \quad \sqrt[6]{8}.$

336 $\sqrt[6]{5}; \quad \sqrt[3]{\frac{1}{3}}; \quad \sqrt[4]{6}.$

337 $\sqrt[4]{9}; \quad \sqrt{4}; \quad \sqrt[3]{-2}.$

338 $\sqrt{\frac{1}{2}}; \quad \sqrt[10]{41}; \quad \sqrt[5]{-\frac{3}{4}}.$

339 $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}; \quad \sqrt[6]{3}; \quad \sqrt[4]{2}.$

340 $\sqrt[3]{\frac{(-2)^2}{3}}; \quad \sqrt[4]{\frac{2}{3^3}}; \quad \sqrt{5}.$

341 $\sqrt{x^3}; \quad \sqrt[3]{3x^4}; \quad \sqrt[4]{\frac{1}{2}x^2}.$

342 $\sqrt{a^2b}; \quad \sqrt[5]{a^4}; \quad \sqrt[10]{3ab^3}.$

343 $\sqrt{a}; \quad \sqrt[4]{x^3}; \quad \sqrt[3]{2ax^2}.$

344 $\sqrt[6]{y^5}; \quad \sqrt[3]{a^2y}; \quad \sqrt{\frac{b}{2x^2}}.$

345 $\sqrt[3]{3by^2}; \quad \sqrt{\frac{b}{2}}; \quad \sqrt[4]{b^3y}.$

346 $\sqrt[6]{5x^3y^3}; \quad \sqrt[4]{xy}; \quad \sqrt[3]{-2x^2y^2}.$

347 $\sqrt[3]{\frac{1}{x^4}}; \quad \sqrt[5]{\frac{y^2}{2x^2}}; \quad \sqrt[15]{\frac{12x^4}{y^6}}.$

348 $\sqrt{a+b}; \quad \sqrt[3]{(a+b)^2}; \quad \sqrt[9]{a-b}.$

349 $\sqrt[4]{\frac{x+1}{(y-1)^2}}; \quad \sqrt{\frac{y-1}{(x+1)^4}}; \quad \sqrt[6]{\frac{xy}{x+1}}.$

CONFRONTO DI RADICALI

→ Teoria a pagina **746**

ATTIVITÀ INTERATTIVA

Confronta i seguenti radicali.

350 $\sqrt{5}; \quad \sqrt[3]{3}; \quad \sqrt[8]{11}.$

IN 3 PASSI

1. Trova il mcm tra gli indici $m = \text{mcm}(2; 3; 8)$.
2. Riduci i tre radicali allo stesso indice m.
3. Confronta i radicandi e ordina i radicali.

351 $\sqrt[3]{2}; \quad \sqrt[6]{6}; \quad \sqrt{7}.$

352 $\sqrt[3]{4}; \quad \sqrt[5]{10}; \quad \sqrt[15]{1020}.$

353 $\sqrt{10}; \quad \sqrt[3]{50}; \quad \sqrt[4]{60}.$

354 $\sqrt{5}; \quad \sqrt[4]{2}; \quad \sqrt[3]{3}.$

355 $\sqrt[5]{-3}; \quad -\sqrt[3]{-2}; \quad -\sqrt[15]{30}.$

356 $\sqrt[3]{-4}; \quad \sqrt[6]{15}; \quad \sqrt{3}.$

357 $\sqrt[9]{5}; \quad \sqrt[3]{\frac{8}{3}}; \quad \sqrt{\frac{3}{2}}.$

358 $\sqrt[6]{2}; \quad \sqrt[8]{\frac{5}{3}}; \quad \sqrt[4]{\frac{3}{2}}.$

COMPLETA inserendo i simboli $<$ o $>$.

359 $\sqrt[4]{3} \;\square\; \sqrt[3]{2}; \quad \sqrt[6]{5} \;\square\; \sqrt{3}.$

360 $\sqrt[3]{0{,}2} \;\square\; \sqrt{0{,}5}; \quad \sqrt[3]{6} \;\square\; \sqrt[4]{27}.$

6 $\sqrt{\frac{12}{5}} : \sqrt{\frac{72}{75}}$; $\quad \sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{48} \cdot \sqrt[3]{3}$; $\quad -\sqrt[5]{32} : \sqrt[5]{-2^6}$. $\quad \left[\sqrt{\frac{5}{2}}; 12; \sqrt[5]{\frac{1}{2}}\right]$

7 $\frac{\sqrt{56}}{\sqrt{7}} \cdot \sqrt{8}$; $\quad \frac{\sqrt[3]{-45}}{\sqrt[3]{-5}} \cdot \sqrt[3]{81}$; $\quad \sqrt[4]{12} \cdot \sqrt[4]{27} : \sqrt[4]{\frac{1}{4}}$. $\quad [8; 9; 6]$

8 $\sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{5}$; $\quad \sqrt[3]{-2} \cdot \sqrt[9]{-8}$. $\quad [\sqrt[4]{5^3}; \sqrt[3]{4}]$

9 $\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt{2}$; $\quad \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{3}$. $\quad [\sqrt[6]{288}; \sqrt[4]{27}]$

10 $\sqrt{7} \cdot \sqrt[3]{7}$; $\quad \sqrt[3]{-5} : \sqrt[9]{-625}$. $\quad \left[\sqrt[6]{7^5}; \sqrt[9]{\frac{1}{5}}\right]$

11 $\sqrt{14} : \sqrt[3]{2}$; $\quad \sqrt[8]{7^3} : \sqrt[4]{7}$. $\quad [\sqrt[6]{7^3 \cdot 2}; \sqrt[8]{7}]$

12 $\sqrt[7]{-7} : \sqrt[14]{49}$; $\quad \sqrt[3]{-16} \cdot \sqrt{54}$. $\quad [-1; -\sqrt[6]{2^{11} \cdot 3^9}]$

13 $\sqrt[3]{4} : \sqrt[12]{\frac{64}{9}}$; $\quad \sqrt[6]{5^7} : \sqrt[15]{\frac{2^3}{5^2}}$. $\quad \left[\sqrt[6]{6}; \sqrt[10]{\frac{5^{13}}{4}}\right]$

14 $\sqrt[4]{\left(\frac{13}{5}\right)^2 - 1} : \sqrt{\frac{5}{48}}$ $\quad \left[\frac{24}{5}\right]$

15 $\sqrt[6]{2^3 + 5^3 - 12} : \sqrt[3]{\frac{11}{25}}$ $\quad [\sqrt[3]{25}]$

16 $\sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{56}} \cdot \sqrt[4]{\frac{7^4}{9}}$ $\quad \left[\sqrt[3]{\frac{49}{27}}\right]$

17 $\sqrt[4]{200} \cdot \sqrt[6]{2^2 \cdot 5^4} : \sqrt[12]{50}$ $\quad [10]$

18 $\sqrt[12]{256} \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{2}} \cdot \sqrt{\frac{6}{81}}$ $\quad \left[\sqrt[6]{\frac{2^5}{3^5}}\right]$

19 $\sqrt[4]{4^2 + 3^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{20}} \cdot \sqrt[3]{-32}$ $\quad [-\sqrt[3]{4}]$

20 $\sqrt{3 - \frac{1}{3}} : \sqrt[4]{1 - \frac{1}{9}}$ $\quad [\sqrt[4]{8}]$

21 $\sqrt{\frac{6}{(-2)^2 \cdot 5}} \cdot \sqrt[3]{-\frac{20}{3}} \cdot \sqrt[6]{\frac{6}{5}}$ $\quad \left[-\sqrt[3]{\frac{6}{5}}\right]$

22 $\frac{\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[6]{3}} \cdot \frac{\sqrt[6]{6}}{\sqrt[3]{2}} : \sqrt[12]{3^7}$ $\quad \left[\sqrt[6]{\frac{1}{2}}\right]$

23 **YOU & MATHS** Find the area of a triangle with a base of $2\sqrt{2}$ cm and a height of $\sqrt[3]{3}$ cm. $\quad [\sqrt[6]{72}\ \text{cm}^2]$

24 Determina la lunghezza della base di un parallelogramma, sapendo che l'altezza è lunga $\sqrt[4]{5}$ cm e che l'area del parallelogramma è di $\sqrt[8]{75}$ cm^2. $\quad [\sqrt[8]{3}\ \text{cm}]$

25 Considera un parallelepipedo a base rettangolare. I due lati della base sono legati dalla relazione $a = 2\sqrt{5}\, b$ e l'altezza del parallelepipedo è uguale alla metà della somma dei due lati della base. Scrivi l'espressione che esprime il volume del parallelepipedo.

UN PASSO IN PIÙ Come devi modificare b per far triplicare il volume? $\quad [\sqrt{5}(1 + 2\sqrt{5})b^3; \sqrt[3]{3}\, b]$

Radicali letterali

26 **TEST** Il prodotto $\sqrt[4]{2xy^2} \cdot \sqrt[3]{xy^2}$, con $x \geq 0$, è uguale a:

A $\sqrt[12]{2x^7y^{14}}$.

B $\sqrt[7]{2x^3y^4}$.

C $\sqrt[12]{8x^7y^{14}}$.

D $\sqrt[12]{2x^3y^4}$.

Esegui le operazioni e semplifica, supponendo positivi i fattori letterali dei radicandi.

27 $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x}$; $\quad \sqrt[4]{a^3} : \sqrt{a}$. $\quad [\sqrt[6]{x^7}; \sqrt[4]{a}]$

28 $\sqrt{a^2b} \cdot \sqrt[3]{a}$; $\quad \sqrt[6]{x^3y} : \sqrt[3]{xy}$. $\quad \left[\sqrt[6]{a^8b^3}; \sqrt[6]{\frac{x}{y}}\right]$

29 $(\sqrt[16]{a^7} : \sqrt[8]{2a}) \cdot \sqrt[4]{4a}$ $\quad [\sqrt[16]{64a^9}]$

30 $\sqrt[4]{\frac{xy^3}{a}} \cdot \left(\sqrt[8]{xy} : \sqrt{\frac{x^3}{a}}\right)$ $\quad \left[\sqrt[8]{\frac{a^2y^7}{x^9}}\right]$

31 $\sqrt{x+1} \cdot \sqrt[4]{x+1}$ $\quad [\sqrt[4]{(x+1)^3}]$

32 **AL VOLO** $\sqrt{\frac{x-3}{x}} \cdot \sqrt[4]{\frac{x}{x-3}}$

33 $\frac{\sqrt{2+3x}}{\sqrt[5]{2+3x}} : \sqrt[10]{2+3x}$ $\quad [\sqrt[5]{2+3x}]$

34 $(\sqrt[12]{x^5} \cdot \sqrt[3]{x^2}) : \sqrt{x^3}$ $\quad \left[\sqrt[12]{\frac{1}{x^5}}\right]$

35 $\sqrt[3]{\frac{a+2}{y-1}} : \sqrt{\frac{a^2+2a}{y^2-1}}$ $\quad \left[\sqrt[6]{\frac{(y-1)(y+1)^3}{a^3(a+2)}}\right]$

36 $\sqrt[3]{\frac{6x^3 - 3x^3y}{y+2}} : \sqrt{\frac{2x^2 - x^2y}{y+2}}$ $\quad \left[\sqrt[6]{\frac{9(y+2)}{2-y}}\right]$

126 ★☆ $\frac{1-\sqrt{2}}{a}\sqrt[6]{\frac{a^4}{(\sqrt{2}-1)^5}}$ $\left[a<0: \sqrt[6]{\frac{\sqrt{2}-1}{a^2}}; a>0: -\sqrt[6]{\frac{\sqrt{2}-1}{a^2}}\right]$

127 ★★ $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)(x+1)\sqrt{\frac{36}{x^3+2x^2+x}}$ $\left[x>0: -\sqrt{\frac{1}{x}}\right]$

TRASPORTO DI UN FATTORE FUORI DAL SEGNO DI RADICE

→ Teoria a pagina **778**

ATTIVITÀ INTERATTIVA

Radicali numerici

COME SI FA

► **Portiamo fuori dal segno di radice tutti i possibili fattori.**

a. $\sqrt{200}$; **b.** $\sqrt[3]{\frac{81}{16}}$.

Se $a \geq 0$:
$\sqrt[n]{a^{nq+y}} = a^q\sqrt[n]{a^y}$.

a. $\sqrt{200} = \sqrt{2^3 \cdot 5^2} = \sqrt{2 \cdot 2^2 \cdot 5^2} = \sqrt{2^2 \cdot 5^2} \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

b. $\sqrt[3]{\frac{81}{16}} = \sqrt[3]{\frac{3^4}{2^4}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 3^3}{2 \cdot 2^3}} = \sqrt[3]{\frac{3^3}{2^3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

Porta fuori dal segno di radice tutti i possibili fattori.

128 ★☆ $\sqrt{8}$; $\sqrt{27}$. $[2\sqrt{2}; 3\sqrt{3}]$

129 ★☆ $\sqrt{24}$; $\sqrt[3]{56}$. $[2\sqrt{6}; 2\sqrt[3]{7}]$

130 ★☆ $\sqrt{50}$; $\sqrt[3]{160}$. $[5\sqrt{2}; 2\sqrt[3]{20}]$

131 ★☆ $\sqrt{\frac{5}{32}}$; $\sqrt{\frac{125}{8}}$. $\left[\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{2}}; \frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\right]$

132 ★☆ $\sqrt{\frac{100}{81}}$; $\sqrt[3]{810}$. $\left[\frac{10}{9}; 3\sqrt[3]{30}\right]$

133 ★☆ $\sqrt{\frac{96}{125}}$; $\sqrt[3]{-162}$. $\left[\frac{4}{5}\sqrt{\frac{6}{5}}; -3\sqrt[3]{6}\right]$

134 ★☆ $\sqrt{\frac{75}{72}}$; $\sqrt{1445}$. $\left[\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{6}}; 17\sqrt{5}\right]$

135 ★☆ $\sqrt[3]{0{,}003}$; $\sqrt{\frac{15}{8}}$. $\left[\frac{1}{10}\sqrt[3]{3}; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2}}\right]$

136 ★☆ $\sqrt{450}$; $\sqrt[4]{5^6 \cdot 2^4}$. $[15\sqrt{2}; 10\sqrt{5}]$

137 ★☆ $\sqrt[3]{1200}$; $\sqrt[4]{160}$. $[2\sqrt[3]{150}; 2\sqrt[4]{10}]$

138 ★☆ $\sqrt{27\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)}$; $\sqrt[4]{1008}$. $\left[\frac{3}{2}\sqrt{3}; 2\sqrt[4]{63}\right]$

PIT STOP **5 ESERCIZI SUL TRASPORTO DI UN FATTORE FUORI DAL SEGNO DI RADICE IN PIÙ**

Vuoi vedere subito se il passaggio è giusto o sbagliato?
Vai sul Tutor e fai l'esercitazione con il Checker.

139 ★☆ $\sqrt[3]{\frac{80}{81}}$; $\sqrt{2^4 \cdot 3^5 \cdot 4^6}$. $\left[\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{10}{3}}; 2^8 \cdot 3^2\sqrt{3}\right]$

140 ★☆ $\sqrt[3]{5^4 \cdot 7 \cdot 2^6}$; $\sqrt[4]{2^7 \cdot 9^2 \cdot 5}$. $[20\sqrt[3]{35}; 6\sqrt[4]{40}]$

141 ★☆ $\sqrt[4]{3^{15}+3^{12}}$; $\sqrt[3]{5 \cdot 4^4 - 200}$. $[27\sqrt[4]{28}; 6\sqrt[3]{5}]$

142 ★☆ $\sqrt{(-2)^4 \cdot 7}$; $\sqrt[3]{(-2)^9 \cdot 9}$. $[4\sqrt{7}; -8\sqrt[3]{9}]$

143 ★☆ $\sqrt[3]{5^4 - 5^3}$; $\sqrt{4^4 + 12^2}$. $[5\sqrt[3]{4}; 20]$

144 ★★ $\sqrt[n]{4^{n+1}}$, con $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. $[4\sqrt[n]{4}]$

145 ★★ $\sqrt[n]{5^{n+1} \cdot 3^{2n}}$, con $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. $[45\sqrt[n]{5}]$

146 ★☆ **CACCIA ALL'ERRORE**

a. $\sqrt{(-3)^2 5^3} = (-3) \cdot 5\sqrt{5}$

b. $\sqrt{(-2)^3(-3)} = -2\sqrt{6}$

c. $\sqrt{6(1-\sqrt{3})^6} = (1-\sqrt{3})^3 \cdot \sqrt{6}$

d. $\sqrt[3]{(-6)^4(-2)} = 6\sqrt[3]{12}$

3. Potenza e radice

POTENZA DI UN RADICALE

→ Teoria a pagina **778**

ATTIVITÀ INTERATTIVA

COME SI FA

► **Calcoliamo le seguenti potenze e semplifichiamo: a. $\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}\right)^4$; b. $(\sqrt[5]{-28})^3$.**

a. $\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4(\sqrt[3]{2})^4 = \frac{1}{16}\sqrt[3]{2^4} \underset{\text{portiamo fuori}}{=} \frac{1}{16}\cdot 2\sqrt[3]{2} = \frac{1}{8}\sqrt[3]{2}$

b. $(\sqrt[5]{-28})^3 \underset{\substack{\text{scomponiamo}\\ \text{il radicando}\\ \text{in fattori}}}{=} (\sqrt[5]{-2^2\cdot 7})^3 = \sqrt[5]{(-2^2\cdot 7)^3} = \sqrt[5]{-2^6\cdot 7^3} \underset{\text{portiamo fuori}}{=} -2\sqrt[5]{2\cdot 7^3}$

Se $a \geq 0$ e $n, p \in \mathbb{N} - \{0\}$:
$(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$.

Calcola le potenze e semplifica.

205 $(\sqrt{2})^4$; $(\sqrt[3]{18})^3$. $[4; 18]$

206 $(\sqrt[3]{2^3\cdot 5})^2$; $(\sqrt[3]{2^3+5})^2$. $[4\sqrt[3]{25}; \sqrt[3]{169}]$

207 $(\sqrt[4]{3^3\cdot 7})^5$; $(\sqrt[3]{5^2\cdot 11})^2$. $[189\sqrt[4]{189}; 5\sqrt[3]{5\cdot 11^2}]$

208 $(\sqrt[4]{24})^2$; $(\sqrt[5]{16})^3$. $[2\sqrt{6}; 4\sqrt[5]{4}]$

209 $\left(\sqrt[4]{\frac{9}{24}}\right)^3$; $(\sqrt[7]{100})^4$. $\left[\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{27}{2}}; 10\sqrt[7]{10}\right]$

210 $\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{3}\right)^5$; $\left(-2\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^4$. $\left[\frac{1}{3^4}\sqrt[3]{9}; 4\right]$

211 $\left(\sqrt{6}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)^3$; $\left(\frac{1}{2}\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{12}\right)^3$. $[2\sqrt{6}; 3\sqrt[4]{72}]$

212 $(\sqrt[3]{25}:\sqrt{5})^3$; $(\sqrt[6]{32})^2\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{1}{8}}\right)^4$. $\left[\frac{5}{\sqrt{5}}; \frac{1}{8}\sqrt[3]{4}\right]$

213 $(\sqrt{3^2+1})^3$; $(\sqrt[3]{5^2-1})^4$. $[10\sqrt{10}; 48\sqrt[3]{3}]$

214 $(\sqrt{2^2+3^2})^3$; $(\sqrt[4]{4^2+2^4})^2$. $[13\sqrt{13}; 4\sqrt{2}]$

215 Determina l'area di un quadrato di lato $\sqrt[3]{50}$ cm. $[5\sqrt[3]{20}\ \text{cm}^2]$

216 Calcola il volume di una sfera di raggio $\sqrt{6}$ cm. $[8\pi\sqrt{6}\ \text{cm}^3]$

Calcola le potenze e semplifica, supponendo verificate le condizioni di esistenza.

217 $(\sqrt{a^2x})^3$; $(\sqrt[3]{x^2y^3})^2$. $[a^3x\sqrt{x}; xy^2\sqrt[3]{x}]$

218 $(\sqrt[4]{2x^3})^2$; $(\sqrt[3]{xy^5})^2$. $[x\sqrt{2x}; y^3\sqrt[3]{x^2y}]$

219 $(\sqrt{2x})^5\cdot(\sqrt[3]{-x^2})^6$; $\left(\sqrt[3]{\frac{x}{9}}\right)^2:(\sqrt[6]{x})^3$. $\left[4x^6\sqrt{2x}; \frac{1}{3}\sqrt[6]{\frac{x}{9}}\right]$

220 $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}x}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{x}\right)^2:(x\sqrt[6]{9x})^2$ $\left[\frac{1}{27x}\cdot\sqrt[3]{\frac{x}{9}}\right]$

221 **YOU & MATHS** If $\sqrt{x} = \sqrt[3]{2}$, then x^3 is equal to what?

A $\sqrt{2}$

B 2

C $\sqrt[3]{4}$

D 4

E $3\sqrt[3]{2}$

ESERCIZI

5 Scrivi le condizioni di esistenza e porta fuori dal segno di radice i fattori possibili.

a. $\sqrt{x^3+7x^2}$; b. $\sqrt[4]{\dfrac{48a^{12}b}{c^{10}}}$; c. $\sqrt[6]{a^7x^6}$. ___ / 24

6 Discutendo al variare di a e x in $\mathbb{R}$, porta i fattori dentro al segno di radice.

a. $\dfrac{x}{a}\sqrt{5a}$; b. $(a-2)\sqrt{a}$; c. $-x\sqrt[3]{x}$. ___ / 24

Inquadrami e controlla i risultati

Il tuo punteggio: ___ / 100

5. Razionalizzazione

→ Teoria a pagina **781**

ATTIVITÀ INTERATTIVA

Il denominatore è un radicale irriducibile

COME SI FA

► **Razionalizziamo i denominatori di: a.** $\dfrac{9}{\sqrt{3}}$; **b.** $\dfrac{10}{\sqrt[3]{5}}$.

a. $\dfrac{9}{\sqrt{3}}=\dfrac{9}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\dfrac{9\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}}=\dfrac{9\sqrt{3}}{3}=3\sqrt{3}$

b. $\dfrac{10}{\sqrt[3]{5}}=\dfrac{10}{\sqrt[3]{5}}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}}=\dfrac{10\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}}=\dfrac{10\sqrt[3]{5^2}}{5}=2\sqrt[3]{5^2}$

Razionalizza i denominatori delle seguenti frazioni. Considera positivi tutti i fattori letterali dei radicandi.

424 $\dfrac{14}{\sqrt{7}}$; $\dfrac{18}{\sqrt{6}}$. $[2\sqrt{7}; 3\sqrt{6}]$

425 $\dfrac{12}{\sqrt{3}}$; $\dfrac{15}{3\sqrt{5}}$. $[4\sqrt{3}; \sqrt{5}]$

426 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$; $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$. $\left[\dfrac{\sqrt{6}}{2}; \dfrac{\sqrt{3}+3}{3}\right]$

427 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$; $\dfrac{5+\sqrt{20}}{\sqrt{45}}$. $\left[\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}; \dfrac{\sqrt{5}+2}{3}\right]$

428 $\dfrac{a}{\sqrt{a}}$; $\dfrac{2x^2}{\sqrt{2x}}$. $[\sqrt{a}; x\sqrt{2x}]$

429 $\dfrac{6ax}{\sqrt{2ax}}$; $\dfrac{\sqrt{y}-\sqrt{ay}}{4\sqrt{y}}$. $\left[3\sqrt{2ax}; \dfrac{1-\sqrt{a}}{4}\right]$

430 $\dfrac{\sqrt{2x}-1}{\sqrt{x}}$; $\dfrac{x}{3\sqrt{3x}}$. $\left[\dfrac{\sqrt{2}\,x-\sqrt{x}}{x}; \dfrac{\sqrt{3x}}{9}\right]$

431 $\dfrac{a+\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}$; $\dfrac{\sqrt{3b}-b}{\sqrt{b}}$. $\left[\dfrac{\sqrt{a}+1}{2}; \sqrt{3}-\sqrt{b}\right]$

432 $\dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x-2}}$; $\dfrac{24a^2}{\sqrt{12ax}}$. $\left[x\sqrt{x-2}; \dfrac{4a\sqrt{3ax}}{x}\right]$

433 $\dfrac{a+3}{\sqrt{a+3}}$; $\dfrac{4+2y}{\sqrt{y+2}}$. $[\sqrt{a+3}; 2\sqrt{y+2}]$

434 $\dfrac{2a+4}{\sqrt[4]{a^2+4a+4}}$ $[2\sqrt{a+2}]$

435 $\dfrac{6}{\sqrt[3]{2}}$; $\dfrac{12}{\sqrt[4]{2}}$. $[3\sqrt[3]{4}; 6\sqrt[4]{8}]$

436 $\dfrac{18}{\sqrt[7]{8}}$; $\dfrac{10}{\sqrt[9]{25}}$. $[9\sqrt[7]{16}; 2\sqrt[9]{5^7}]$

437 $\dfrac{50}{2\sqrt[3]{25}}$; $\dfrac{14}{\sqrt[5]{7^4}}$. $[5\sqrt[3]{5}; 2\sqrt[5]{7}]$

438 $\dfrac{1}{\sqrt[4]{27}}$; $\dfrac{3}{2\sqrt[5]{9}}$. $\left[\dfrac{\sqrt[4]{3}}{3}; \dfrac{\sqrt[5]{27}}{2}\right]$

439 $\dfrac{100}{\sqrt[3]{100}}$; $\dfrac{64}{\sqrt[7]{32}}$. $[10\sqrt[3]{10}; 32\sqrt[7]{4}]$

440 $\dfrac{42}{3\sqrt[3]{49}}$; $\dfrac{36}{\sqrt[7]{3^5\cdot 2^4}}$. $[2\sqrt[3]{7}; 6\sqrt[7]{3^2\cdot 2^3}]$

441 $\dfrac{33}{\sqrt[3]{2\cdot 11^2}}$; $\dfrac{10}{\sqrt[6]{5^5}}$. $\left[\dfrac{3\sqrt[3]{44}}{2}; 2\sqrt[6]{5}\right]$

ESERCIZI

222 ★ Data l'equazione $(a-2)x-2y-1=0$, trova per quale valore di a rappresenta una retta:
a. parallela all'asse x;
b. parallela all'asse y;
c. parallela alla retta di equazione
$$2x-y+1=0;$$
d. perpendicolare alla retta di equazione
$$6x+3y+4=0.$$
[a) 2; b) $\nexists a \in \mathbb{R}$; c) 6; d) 3]

223 ★ VERIFICA CON GEOGEBRA Determina per quali valori di k la retta di equazione $-(1+k)y+2x-k=0$:
a. passa per l'origine;
b. è parallela alla retta $-3x-y=2$;
c. è perpendicolare alla retta $y=x$.
In corrispondenza dei valori di k trovati, rappresenta le rette con GeoGebra e verifica che soddisfano le proprietà richieste.
[a) 0; b) $-\frac{5}{3}$; c) -3]

224 ★★ Calcola per quali valori di a la retta di equazione
$$(a+2)x-2ay+3-a=0:$$
a. è parallela all'asse x;
b. è perpendicolare alla retta $y=\frac{5}{4}x$;
c. ha coefficiente angolare negativo;
d. è parallela alla retta di equazione
$$\sqrt{3}x-\sqrt{27}y+\sqrt{2}=0.$$
[a) -2; b) $-\frac{10}{13}$; c) $-2<a<0$; d) -6]

225 ★★ Determina il valore del parametro k in modo che la retta di equazione $(2k+4)x-6ky+5=0$:
a. sia perpendicolare alla retta $2x-6y+8=0$;
b. passi per l'origine degli assi;
c. sia parallela alla retta
$$kx-(3k+5)y+2k=0;$$
d. sia parallela alla retta $3-11y=0$.
[a) $-\frac{1}{5}$; b) $\nexists k \in \mathbb{R}$; c) $-\frac{10}{11}$; d) -2]

226 ★★ Data la retta di equazione $(3a+1)x+(4-2a)y+4=0$ determina a in modo che:
a. passi per il punto $(-2; 3)$;
b. sia parallela alla retta $y-2x+1=0$;
c. formi con il semiasse positivo delle x un angolo ottuso;
d. sia perpendicolare alla bisettrice del secondo e quarto quadrante;
e. sia parallela alla retta $x-\frac{1}{5}=0$;
f. sia perpendicolare alla retta $2x=4\sqrt{2}-3y$.
[a) $\frac{7}{6}$; b) 9; c) $-\frac{1}{3}<a<2$; d) -5; e) 2; f) $\nexists a \in \mathbb{R}$]

227 ★★ Determina per quale valore di b la retta di equazione $(b-1)x+(4-b)y-b=0$ è:
a. perpendicolare alla retta $3y-3x+4=0$;
b. parallela alla retta passante per $O(0; 0)$ e $A(-2; 4)$;
c. parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante;
d. perpendicolare alla retta $y+2\sqrt{3}=0$;
e. parallela alla retta $3\sqrt{2}y+5\sqrt{2}x+8\sqrt{3}=0$;
f. perpendicolare alla retta $5-3x=0$.
[a) $\frac{5}{2}$; b) 3; c) $\nexists b \in \mathbb{R}$; d) 4; e) $\frac{23}{8}$; f) 1]

Intersezione di due rette

228 ★ Disegna le rette di equazioni $y=-6x+1$ e $3x-y=8$ e calcola le coordinate del loro punto di intersezione.
[$(1; -5)$]

Rappresenta graficamente i seguenti sistemi e determina le loro soluzioni.

229 ★ $\begin{cases} x-3y+2=0 \\ 2x+y=-\frac{5}{3} \end{cases}$ [rette incidenti: $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$]

230 ★ $\begin{cases} x=\frac{7}{2}y-1 \\ 7y-2x-4=0 \end{cases}$ [rette parallele: impossibile]

231 ★ $\begin{cases} 2x-1=0 \\ y+4x=7 \end{cases}$ [rette incidenti: $\left(\frac{1}{2}; 5\right)$]

232 ★ $\begin{cases} 6x-2y=3 \\ \frac{2x-1}{2}=\frac{y}{3} \end{cases}$ [rette coincidenti: indeterminato]

ESERCIZI

Scrivi l'equazione della parallela e della perpendicolare a r passanti per P.

298 r: $y = -4x$; $P(2; 1)$. $\left[y = -4x + 9; \ y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right]$

299 r: $2x - y + 4 = 0$; $P(0; 1)$. $\left[y = 2x + 1; \ y = -\frac{1}{2}x + 1\right]$

300 r: $6x = 6y - 1$; $P(-2; 2)$. $[y = x + 4; \ y = -x]$

301 r: $3x - 4 = 0$; $P(1; 8)$. $[x = 1; \ y = 8]$

302 r: $2y - 4x = 1$; $P\left(-2; \frac{1}{2}\right)$. $\left[y = 2x + \frac{9}{2}; \ y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right]$

303 Dati il punto $A(-1; 5)$ e la retta r: $x - 4y = 0$, trova la retta perpendicolare a r e passante per A, poi determina su di essa un punto B tale che la sua ordinata sia 8. $\left[y = -4x + 1; \ B\left(-\frac{7}{4}; 8\right)\right]$

Scrivi l'equazione della retta passante per P che soddisfa la condizione indicata.

304 $P(0; -5)$; parallela alla retta passante per $A(3; 0)$ e $B(-4; 1)$. $\left[y = -\frac{1}{7}x - 5\right]$

305 $P(-1; -1)$; perpendicolare alla retta passante per $A\left(\frac{2}{3}; 1\right)$ e $B\left(-\frac{10}{3}; -1\right)$. $[y = -2x - 3]$

306 Per ogni equazione individua quelle della retta parallela e della retta perpendicolare passanti per l'origine degli assi.

a. $4x - y + 8 = 0$; **b.** $2x + 7 = 0$; **c.** $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 3$; **d.** $5y = 1$; **e.** $y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$.

307 Determina l'ordinata all'origine della retta r parallela alla retta di equazione $3y + 6x + 4 = 0$ e passante per $A\left(-\frac{1}{8}; -\frac{5}{4}\right)$. $\left[-\frac{3}{2}\right]$

308 Scrivi l'equazione della retta passante per il punto di intersezione delle rette di equazioni $x - 2y + 1 = 0$ e $-3x + y = -2$, e perpendicolare alla retta di equazione $\frac{y}{2} - \frac{4}{3} = 0$. $[x - 1 = 0]$

309 **YOU & MATHS** Let A be the point of intersection of the two lines $y = 4 - 3x$ and $\frac{x}{6} + \frac{y}{2} - 1 = 0$. Find the line that passes through A that is parallel to $5x + 8y - 10 = 0$. $[20x + 32y - 71 = 0]$

310 Il piede della perpendicolare per $P(-3; 6)$ a una retta r è $H(4; 1)$. Determina l'equazione di r. $[7x - 5y - 23 = 0]$

311 Scrivi l'equazione della retta r passante per il punto $A(4; -3)$ e parallela alla retta di equazione $y = \frac{-1 - 3x}{2}$ e quella della retta s passante per $B\left(1; -\frac{2}{3}\right)$ e perpendicolare alla retta di equazione $3x + 2y = 0$. Determina inoltre il punto di intersezione tra r e s. $\left[y = -\frac{3}{2}x + 3; \ y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}; \ (2; 0)\right]$

312 **VERO O FALSO?**

a. La retta passante per $A(1; 2)$ e parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante ha equazione $y + x = 1$. V F

b. Tutte le rette perpendicolari alla retta di equazione $3x - 2y + 8 = 0$ hanno equazione $2x + 3y + 2k + 1 = 0$, con $k \in \mathbb{R}$. V F

c. La retta passante per $B(0; 4)$ e perpendicolare all'asse delle ordinate ha equazione $x - 4 = 0$. V F

d. Tutte le rette passanti per $Q(-2; 2)$ hanno equazione $y = mx + 2m + 2$. V F

ESERCIZI

Applichiamo la formula della distanza:

$$d = \frac{|\overset{x_A}{1 \cdot 1} + (-2) \cdot \overset{y_A}{6} - \overset{c}{1}|}{\sqrt{\underset{a}{1}^2 + \underset{b}{(-2)}^2}} = \frac{|-12|}{\sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}} \underset{\text{razionalizziamo}}{=} \frac{12\sqrt{5}}{5}.$$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

distanza d di $P(x_0; y_0)$ dalla retta di equazione $ax + by + c = 0$

Calcola la distanza del punto P dalla retta r.

421 ★ $P(3; 0)$, $r: 2x - \frac{3}{2}y - 2 = 0$. $\left[\frac{8}{5}\right]$

422 ★ $P(-2; 4)$, $r: -8x = 6y + 1$. $\left[\frac{9}{10}\right]$

423 ★ $P(1; 2)$, $r: 15x + 8y = -3$. $[2]$

424 ★ $P\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $r: \frac{5}{2}y = 6x + \frac{9}{4}$. $[1]$

425 ★★ $P(-3; -2)$, $r: y = 3x - 1$. $\left[\frac{4}{5}\sqrt{10}\right]$

426 ★★ $P(\sqrt{3}; 0)$, $r: x + y = 0$. $\left[\frac{\sqrt{6}}{2}\right]$

427 ★★ $P(3; 5)$, $r: 4x - 3y = 2$. $[1]$

428 ★★ $P(-2; 1)$, $r: y - 3 = 0$. $[2]$

429 ★ Determina la distanza del punto $P(-3; -1)$ dalla retta di equazione $\frac{x+1}{2} = y$. Cosa puoi dedurre dal risultato?

430 ★ Calcola la distanza tra le rette parallele di equazioni $2x - 6y + 3 = 0$ e $y = \frac{1}{3}x - 2$. $\left[\frac{3}{4}\sqrt{10}\right]$

431 ★ Trova i punti dell'asse x che hanno distanza 1 dalla retta di equazione $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$.

OCCHIO AI DATI Modifica l'ordinata all'origine della retta affinché uno dei punti sia l'origine degli assi e l'altro appartenga al semiasse negativo delle ascisse. Quale altro dato dell'esercizio potresti cambiare per ottenere due punti con queste caratteristiche? $\left[(1; 0), \left(-\frac{7}{3}; 0\right)\right]$

432 ★ I punti $A(2; -6)$ e $B(2; 4)$ sono equidistanti da una retta r. Sapendo che r ha coefficiente angolare $\frac{4}{3}$ e passa per il punto $P\left(-\frac{2}{5}; -\frac{21}{5}\right)$, trova la distanza dei due punti della retta.

OCCHIO AI DATI Per risolvere l'esercizio è sufficiente una sola delle ipotesi date sulla retta r. Perché? Risolvi il problema eliminando uno dei due dati.

433 ★★ Dato il triangolo di vertici $A\left(\frac{3}{2}; 1\right)$, $B\left(-\frac{3}{2}; 5\right)$ e $C(4; 9)$, calcola la misura dell'altezza relativa ad AB e l'area del triangolo. $\left[\frac{34}{5}; 17\right]$

IN 3 PASSI

1. Determina l'equazione della retta AB e scrivila in forma implicita.
2. Calcola la misura dell'altezza relativa ad AB come distanza del punto C dalla retta AB.
3. Trova la misura di AB e infine l'area del triangolo.

434 ★★ Nel triangolo di vertici $O(0; 0)$, $A(4; 2)$, $C(1; 3)$, trova la misura dell'altezza relativa al lato OA. $[\sqrt{5}]$

435 ★★ **TEST** Dato il triangolo di vertici $A(0; 0)$, $B(4; 1)$ e $C(1; 3)$, quanto misura l'altezza relativa al lato AB?

A $\frac{11}{\sqrt{17}}$ **B** $\frac{22}{\sqrt{17}}$ **C** $\sqrt{17}$ **D** $\frac{\sqrt{17}}{2}$

436 ★★ Nel triangolo ABC, le coordinate di C sono $(9; 3)$ e i vertici A e B, di ascisse $x_A = 4$ e $x_B = 8$, sono sulla retta r di equazione $3x - 4y + 4 = 0$. Trova l'area di ABC. $\left[\frac{19}{2}\right]$

437 ★★ Verifica che il punto $N\left(\frac{8}{3}; \frac{8}{9}\right)$ è equidistante dai lati del triangolo di vertici $O(0; 0)$, $A\left(\frac{16}{3}; 0\right)$ e $B\left(\frac{8}{3}; 2\right)$.

438 ★★ Calcola la misura delle altezze del triangolo di vertici $A(2; -3)$, $B(-3; 7)$ e $C\left(-\frac{5}{2}; 1\right)$.

$\left[\overline{AH} = \overline{BK} = \frac{50}{\sqrt{145}}, \overline{CL} = \sqrt{5}\right]$

ESERCIZI

Applichiamo la formula della distanza:

$$d=\frac{|1\cdot \overset{x_A}{1}+(-2)\cdot \overset{y_A}{6}-\overset{c}{1}|}{\sqrt{\underset{a}{1^2}+\underset{b}{(-2)^2}}}=\frac{|-12|}{\sqrt{5}}=\frac{12}{\sqrt{5}}\underset{\text{razionalizziamo}}{=}\frac{12\sqrt{5}}{5}.$$

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

distanza d di $P(x_0; y_0)$ dalla retta di equazione $ax+by+c=0$

Calcola la distanza del punto P dalla retta r.

421 ★ $P(3; 0)$, r: $2x-\frac{3}{2}y-2=0$. $\left[\frac{8}{5}\right]$

422 ★ $P(-2; 4)$, r: $-8x=6y+1$. $\left[\frac{9}{10}\right]$

423 ★ $P(1; 2)$, r: $15x+8y=-3$. $[2]$

424 ★ $P\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, r: $\frac{5}{2}y=6x+\frac{9}{4}$. $[1]$

425 ★ $P(-3; -2)$, r: $y=3x-1$. $\left[\frac{4}{5}\sqrt{10}\right]$

426 ★ $P(\sqrt{3}; 0)$, r: $x+y=0$. $\left[\frac{\sqrt{6}}{2}\right]$

427 ★ $P(3; 5)$, r: $4x-3y=2$. $[1]$

428 ★ $P(-2; 1)$, r: $y-3=0$. $[2]$

429 ★ Determina la distanza del punto $P(-3; -1)$ dalla retta di equazione $\frac{x+1}{2}=y$. Cosa puoi dedurre dal risultato?

430 ★ Calcola la distanza tra le rette parallele di equazioni $2x-6y+3=0$ e $y=\frac{1}{3}x-2$. $\left[\frac{3}{4}\sqrt{10}\right]$

431 ★ Trova i punti dell'asse x che hanno distanza 1 dalla retta di equazione $y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$.

OCCHIO AI DATI Modifica l'ordinata all'origine della retta affinché uno dei punti sia l'origine degli assi e l'altro appartenga al semiasse negativo delle ascisse. Quale altro dato dell'esercizio potresti cambiare per ottenere due punti con queste caratteristiche? $\left[(1; 0), \left(-\frac{7}{3}; 0\right)\right]$

432 ★ I punti $A(2; -6)$ e $B(2; 4)$ sono equidistanti da una retta r. Sapendo che r ha coefficiente angolare $\frac{4}{3}$ e passa per il punto $P\left(-\frac{2}{5}; -\frac{21}{5}\right)$, trova la distanza dei due punti della retta.

OCCHIO AI DATI Per risolvere l'esercizio è sufficiente una sola delle ipotesi date sulla retta r. Perché? Risolvi il problema eliminando uno dei due dati.

433 ★ Dato il triangolo di vertici $A\left(\frac{3}{2}; 1\right)$, $B\left(-\frac{3}{2}; 5\right)$ e $C(4; 9)$, calcola la misura dell'altezza relativa ad AB e l'area del triangolo. $\left[\frac{34}{5}; 17\right]$

IN 3 PASSI

1. Determina l'equazione della retta AB e scrivila in forma implicita.
2. Calcola la misura dell'altezza relativa ad AB come distanza del punto C dalla retta AB.
3. Trova la misura di AB e infine l'area del triangolo.

434 ★ Nel triangolo di vertici $O(0; 0)$, $A(4; 2)$, $C(1; 3)$, trova la misura dell'altezza relativa al lato OA. $[\sqrt{5}]$

435 ★ **TEST** Dato il triangolo di vertici $A(0; 0)$, $B(4; 1)$ e $C(1; 3)$, quanto misura l'altezza relativa al lato AB?

A $\frac{11}{\sqrt{17}}$ **B** $\frac{22}{\sqrt{17}}$ **C** $\sqrt{17}$ **D** $\frac{\sqrt{17}}{2}$

436 ★ Nel triangolo ABC, le coordinate di C sono $(9; 3)$ e i vertici A e B, di ascisse $x_A=4$ e $x_B=8$, sono sulla retta r di equazione $3x-4y+4=0$. Trova l'area di ABC. $\left[\frac{19}{2}\right]$

437 ★★ Verifica che il punto $N\left(\frac{8}{3}; \frac{8}{9}\right)$ è equidistante dai lati del triangolo di vertici $O(0; 0)$, $A\left(\frac{16}{3}; 0\right)$ e $B\left(\frac{8}{3}; 2\right)$.

438 ★★ Calcola la misura delle altezze del triangolo di vertici $A(2; -3)$, $B(-3; 7)$ e $C\left(-\frac{5}{2}; 1\right)$.

$\left[\overline{AH}=\overline{BK}=\frac{50}{\sqrt{145}}, \overline{CL}=\sqrt{5}\right]$

Risolvi le seguenti equazioni.

97 $x^2-5x+6=0$ $[3;2]$

98 $4x^2-7x+3=0$ $\left[\frac{3}{4};1\right]$

99 $b^2+2b-3=0$ $[-3;1]$

100 $x^2+16x+64=0$ [-8 doppia]

101 $x^2+3x+6=0$ [impossibile]

102 $a^2+7a-60=0$ $[-12;5]$

103 $x^2+6x+8=0$ $[-2;-4]$

104 $9x+5x^2=2$ $\left[-2;\frac{1}{5}\right]$

105 $-x^2+2x-2=0$ [impossibile]

106 $6x^2+37x-13=0$ $\left[-\frac{13}{2};\frac{1}{3}\right]$

107 $3x^2+5x+9=0$ [impossibile]

108 $9x^2-30x+25=0$ [$\frac{5}{3}$ doppia]

109 $4x^2-12x-7=0$ $\left[-\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right]$

110 $(2-3x)x=\frac{1}{3}$ [$\frac{1}{3}$ doppia]

111 $6=\frac{x^2}{2}+2x$ $[-6;2]$

112 $(t-3t^2)\cdot 12-1=0$ [$\frac{1}{6}$ doppia]

113 $\frac{x^2}{4}-x+\frac{1}{2}=0$ $[2\pm\sqrt{2}]$

114 $x^2-\frac{x}{6}-\frac{1}{3}=0$ $\left[-\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right]$

115 $\frac{x^2}{2}-\sqrt{2}\,x-8=0$ $[-2\sqrt{2};4\sqrt{2}]$

116 $4x^2+\frac{5}{3}x-1=0$ $\left[-\frac{3}{4};\frac{1}{3}\right]$

117 $x^2-x-\frac{7}{4}=0$ $\left[\frac{1}{2}\pm\sqrt{2}\right]$

118 $6x^2+x\sqrt{3}-1=0$ $\left[\frac{-\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{6}\right]$

119 $\sqrt{2}\,x^2-3x-2\sqrt{2}=0$ $\left[\frac{-\sqrt{2}}{2};2\sqrt{2}\right]$

120 $0{,}75x^2+0{,}5x-2=0$ [

121 $x^2+1{,}\bar{6}x-0{,}\bar{6}=0$ [

122 $2\sqrt{3}\,x^2+\frac{7}{2}x-\frac{3}{4}\sqrt{3}=0$ $\left[-\frac{3}{4}\sqrt{3}\right.$

123 $\frac{\sqrt{7}}{2}x^2-7x-\sqrt{7}=0$ $[\sqrt{\ }$

124 $x^2-(2+\sqrt{3})x+2\sqrt{3}=0$ [2

125 $(\sqrt{3}-1)x^2-x-\sqrt{3}-1=0$ $\left[-\frac{\sqrt{3}+1}{2};\sqrt{\ }\right.$

126 $7x^2+2(3x-1)=x$ $[-$

127 $-x^2+6(x-2)=0$ [imposs

128 $\frac{(x-2)(2+x)}{3}=x$ [4;

129 $12(y^2-1)=-7y$ $\left[-\frac{4}{3}\right.$

130 $2\sqrt{2}\,x=x^2+1$ $[\sqrt{2}$

131 $(3-2x)^2-(2-x)^2=0$ [1;

132 $10^3a^2-10^2a+10=10^2a$ [$\frac{1}{10}$ dop

133 $\sqrt{3}\,x(\sqrt{3}\,x-2)=-1$ [$\frac{\sqrt{3}}{3}$ dopp

134 $0{,}25z^2+z-0{,}5=0$ $[-2\pm\sqrt{\ }$

135 $\frac{2}{5}x=\frac{3}{2}\left(\frac{x^2}{5}-1\right)$ $\left[-\frac{5}{3}\right.$

136 $\sqrt{5}(x^2-1)-4x=0$ $\left[\sqrt{5};-\frac{\sqrt{5}}{5}\right.$

137 $\frac{x}{9}=\left(\frac{x-6}{3}\right)^2$ [4;

138 $x^2-0{,}\bar{6}x=1$ $\left[\frac{1\pm\sqrt{10}}{3}\right.$

139 $(\sqrt{6}+1)(x^2+1)=x(x-1)$ [impossibile

140 $10^{-3}(1+x)+(10x)^2=0$ [impossibile]

141 $3^{\frac{1}{3}}(x^2-3^{\frac{1}{3}})=2x$ $\left[-\frac{\sqrt[3]{9}}{3};\sqrt[3]{9}\right]$

142 $(\sqrt{5}+1)(x^2-x)+x(1-\sqrt{5}\,x)+2^{-2}=0$ $\left[\frac{\sqrt{5}\pm 2}{2}\right]$

236 ★ $(2x+1)(2x-1)-3x(2-x)-(3+x)^2+2=0$ $\left[1\pm\frac{\sqrt{21}}{3}\right]$

237 ★ $(x^2+2x+2)^2+(x+x^2)(x-x^2)=2(x+1)(2x^2+1)-3x^2-4x$ $\left[-1;-\frac{1}{4}\right]$

238 ★ $\frac{(x-3)^2}{2}+\frac{(4+x)(1-x)}{3}+\frac{1}{6}x(4x-7)=\frac{29}{6}$ $\left[\frac{1}{5};6\right]$

239 ★ $(\sqrt{2}+x)^2+(\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-1)-3=0$ $\left[-\sqrt{2};\frac{\sqrt{2}}{3}\right]$

240 ★ $\frac{\left(a+\frac{2}{3}\right)^2}{2}+\frac{1}{3}\left[(a-2)(2+a)+\frac{1}{3}+2a\right]=a^2$ $[4\pm\sqrt{10}]$

241 ★★ $(2x^2-x+3)(2x^2-3-x)-4(x^2+1)(x+1)(x-1)=-8x\left(\frac{1}{2}x^2-1\right)-5$ $[0;8]$

242 ★★ $\left(\frac{1}{2}x-\frac{x-3}{3}\right)\left(\frac{3x+4}{2}+\frac{x-1}{3}\right)-\frac{1}{4}x(x+6)=\frac{x^2}{6}$ $\left[-2;\frac{15}{2}\right]$

243 ★★ $\frac{x+1}{\sqrt{3}}+\frac{2x(x-3)}{3}+\frac{1}{2}(x+2)^2-\frac{1+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=0$ $\left[0;-\frac{2\sqrt{3}}{7}\right]$

244 ★★ $2x\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{4}\right)-\frac{(x+1)(3-2x)}{3}=\frac{1}{2}x\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{5}x\right)-\frac{5}{2}$ [impossibile]

245 ★★ $\frac{x(x-1)^2-(x+2)^3}{4}+2^{-1}x(x-4)=0$ $\left[-\frac{8}{3};-\frac{1}{2}\right]$

246 ★★ $(m+3)^2+\left(m-\frac{1}{3}\right)(3m+2)-\frac{4}{3}=2m(m+1)+14$ $\left[-\frac{7}{2};1\right]$

247 ★★ $(t-2)^3+\left(t-\frac{1}{2}\right)^2=10t+(t-\sqrt{3})t^2$ [impossibile]

248 ★★ $\sqrt{2}x^2+(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(1-x)+x^3+2=0$ $[0;2(1-\sqrt{2})]$

249 ★★ $(x+\sqrt{2}-1)^2=x+1$ $[2-2\sqrt{2};1]$

250 ★★ $(x+3^{-1})^3-(3x^{\frac{3}{2}})^2-(1-2x)^3=3^{-3}$ [impossibile]

251 ★★ $(x+4)(x-\sqrt{3})+\frac{3}{2}\left(\frac{2x+5}{2}\right)^2+\frac{5+32\sqrt{3}}{8}+[\sqrt{3}+0,5(3+x)]x=0$ $\left[-1;-\frac{10}{3}\right]$

252 ★★ $\left(\frac{2-x}{2}+x\right)\left(\frac{4-x}{2}-\frac{x+2}{3}\right)=x^2-\frac{x+5}{6}+\frac{3-x}{3}$ $\left[\frac{2\pm11\sqrt{2}}{17}\right]$

253 ★★ $(x+2)(x^2-2x+4)-6=x(x-2)(x+3)+x^2-3x+8+(x-2)(x+3)$ $\left[0;\frac{8}{3}\right]$

254 ★★ $\frac{x^2}{3-\sqrt{2}}-\frac{1}{3+\sqrt{2}}=-\frac{x^2}{3+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}+3}{7}$ $[\pm1]$

255 ★★ $\frac{x+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}-\frac{2+x^2}{\sqrt{5}+1}=-\sqrt{5}\,\frac{x^2-x+1}{4}+\left(\frac{3}{2}\right)^2$ $[1;-2]$

Risolvi le seguenti equazioni senza calcolare i prodotti notevoli.

256 ★★ $(\sqrt{2}x-1)^2-(x-\sqrt{2})^2=0$ $[\pm1]$

257 ★★ $(x+7)^2+2(3x-4)(x+7)+(3x-4)^2=0$ $\left[-\frac{3}{4}\text{ doppia}\right]$

258 ★★ $\left(3x-\frac{1}{5}\right)^2-6\left(3x-\frac{1}{5}\right)\left(2x+\frac{1}{2}\right)+9\left(2x+\frac{1}{2}\right)^2=0$ $\left[-\frac{17}{30}\text{ doppia}\right]$

ESERCIZI

390 ★★ $\frac{x\sqrt{5}+\sqrt{3}}{x\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{x\sqrt{5}-\sqrt{3}}{x\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{2+4\sqrt{10}\,x}{5x^2-3}$ $\left[\frac{\sqrt{10}}{5}\text{ doppia}\right]$

391 ★★ $1-(x+1):\frac{x+2}{x+3}=\frac{x-3}{2+x}:\frac{x-3}{2x+5}$ [impossibile]

392 ★★ $\frac{1}{x^2-5x+4}+\frac{x+2}{x-4}-\frac{2x-1}{2x-2}+\frac{1}{2}=0$ $[-3\pm\sqrt{11}]$

393 ★★ $\frac{x+1}{x^2-6x+9}-\frac{x+3}{x^2-4x+3}=\frac{2}{x^2-2x+1}$ $[5\pm 2\sqrt{3}]$

394 ★★ $\frac{\sqrt{2}\,x}{x^2-3}+\frac{\sqrt{2}\,x+1}{x^2-2\sqrt{3}\,x+3}=\frac{1}{\sqrt{2}\,x-\sqrt{6}}$ [impossibile]

395 ★★ $\frac{x^2+2\sqrt{2}\,x+2}{x^2-2x+1}-5\cdot\frac{x+\sqrt{2}}{x-1}+6=0$ $\left[2+\sqrt{2};\ \frac{3+\sqrt{2}}{2}\right]$

Risolvi le seguenti equazioni con un'opportuna sostituzione.

396 ★★ $4\cdot\left(\frac{x+3}{2-x}\right)^2-4\left(\frac{x+3}{2-x}\right)=-1$ $\left[-\frac{4}{3}\text{ doppia}\right]$

397 ★★ $\left(\frac{2a-1}{a}\right)^2-\frac{4a-2}{a}+\frac{3}{4}=0$ $\left[\frac{2}{3};2\right]$

398 ★★ $\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2-2\sqrt{5}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)+1=0$ $\left[-\frac{3\sqrt{5}+5}{4};\ \frac{3\sqrt{5}+1}{4}\right]$

Stabilisci se le seguenti equazioni sono equivalenti.

399 ★ $\frac{a-2}{a+1}-\frac{2}{a-1}\left(\frac{3}{a+1}-1\right)=0$ e $(a-\sqrt{2})(\sqrt{2}+2)-a=0.$

400 ★ $\frac{x-1}{1-\frac{1}{x}}=-\frac{3}{x}+4$ e $\frac{x^2-4x}{x}+1=\frac{x-3}{x}$

Problemi

401 ★ Trova il numero razionale positivo tale che la differenza tra il numero stesso e il suo reciproco sia 2,1. $\left[\frac{5}{2}\right]$

402 ★ Il quadrato del precedente di un numero naturale è uguale alla differenza tra il cubo del numero e 271, divisa per il successivo del numero. Determina il numero. [16]

403 ★ In una frazione il denominatore supera di 3 il numeratore. Sottraendo alla frazione il reciproco del numeratore, si ottiene $\frac{17}{40}$. Qual è la frazione? $\left[\frac{5}{8}\right]$

404 ★★ La differenza dei reciproci di due numeri interi consecutivi vale $\frac{1}{132}$. Determina i due numeri. [11; 12 oppure −12; −11]

COME SI FA

Un'azienda di detersivi ecologici sta introducendo nuovi macchinari più efficienti in modo da ridurre il consumo di energia elettrica. In questa fase di transizione, per l'imballaggio sono in funzione una macchina A di vecchio tipo e una macchina B di nuova generazione.
Per realizzare uno stock di magazzino, le due macchine impiegano, funzionando insieme, un quarto d'ora.
Per completare lo stesso lavoro, funzionando da sola, A impiega 40 minuti in più di B.

Condizioni sul prodotto delle radici

COME SI FA

► **Determiniamo per quali valori di m l'equazione $(m+2)x^2+4mx-1+4m=0$, con $m \neq -2$, nell'incognita x, ha soluzioni reali e:**

a. il prodotto delle radici uguale a 3; **b. le radici antireciproche.**

$$\frac{\Delta}{4}=(2m)^2-(m+2)(-1+4m)=\cancel{4m^2}+m-\cancel{4m^2}+2-8m=-7m+2.$$

$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

Soluzioni reali se $\frac{\Delta}{4} \geq 0 \to -7m+2 \geq 0 \to m \leq \frac{2}{7}$.

Prodotto delle radici: $p=\frac{c}{a}=\frac{-1+4m}{m+2}$.

a. La condizione è $p=3$:

$$\frac{-1+4m}{m+2}=3 \quad \to \quad -1+4m=3(m+2) \quad \to \quad -1+4m=3m+6 \quad \to \quad m=7.$$

Poiché $7>\frac{2}{7}$, il valore trovato non è accettabile.

b. Le radici sono antireciproche se il loro prodotto è -1:

radici antireciproche: $x_1=-\frac{1}{x_2} \to x_1 \cdot x_2=-1$

$$\frac{-1+4m}{m+2}=-1 \quad \to \quad -1+4m=-(m+2) \quad \to \quad -1+4m=-m-2 \quad \to \quad 5m=-1 \quad \to \quad m=-\frac{1}{5}$$

$-\frac{1}{5}<\frac{2}{7}$, quindi il valore di m trovato è accettabile.

698 **ASSOCIA** la condizione sulle radici a quella sul loro prodotto p.

a. Radici reciproche. b. Radici concordi. c. Radici antireciproche. d. Radici discordi.

1. $p>0$. 2. $p=-1$. 3. $p<0$. 4. $p=1$.

Determina i valori del parametro per i quali l'equazione, nell'incognita x, ha soluzioni in $\mathbb{R}$ che verificano le condizioni indicate.

699 $x^2+2kx-(1+k^2)=0$; **a.** radici antireciproche; **b.** $x_1 \cdot x_2=-2$. [a) $k=0$; b) $k=\pm 1$]

700 $25x^2-(5k+1)x+\frac{k^2}{4}=0$, con $k \neq 0$; **a.** radici concordi; **b.** radici reciproche.

[a) $k \geq -\frac{1}{10} \wedge k \neq 0$; b) $k=10$ ($k=-10$ non accettabile)]

701 $9mx^2-6mx+m-3=0$, con $m \neq 0$; **a.** radici discordi; **b.** $x_1 \cdot x_2=-2$. [a) $0<m<3$; b) $m=\frac{3}{19}$]

702 $2kx^2-3x+1=0$, con $k \neq 0$; **a.** radici discordi; **b.** $x_1 \cdot x_2>2$; **c.** $x_1 \cdot x_2 \leq -1$.

[a) $k<0$; b) $0<k<\frac{1}{4}$; c) $-\frac{1}{2} \leq k<0$]

703 $6x^2-(1-3a)x-\frac{1}{2}a=0$; **a.** $x_1 \cdot x_2=\frac{1}{6}$; **b.** $x_1=-\frac{1}{x_2}$; **c.** $0<x_1 \cdot x_2<1$.

[a) $a=-2$; b) $a=12$; c) $-12<a<0$]

704 $(b-3)x^2+2\sqrt{7}\,bx+7b+1=0$, con $b \neq 3$; **a.** $x_1 \cdot x_2=7$; **b.** $x_1 \cdot x_2=-5$; **c.** $x_1 \cdot x_2>1$.

[a) $\nexists b \in \mathbb{R}$; b) $b=\frac{7}{6}$; c) $b>3$]

ESERCIZI

718 $kx^2-(2k-1)x+k-3=0$; entrambe positive. $\left[-\frac{1}{8} \leq k < 0 \vee k\right.$

719 $ax^2-2(a+1)x+a-3=0$; **a.** entrambe positive; **b.** entrambe negative. $\left[\text{a) } a > 3; \text{b) } -\frac{1}{5} \leq a\right.$

720 $(a+2)x^2-4x+1=0$; **a.** discordi; **b.** entrambe negative. $[\text{a) } a < -2; \text{b)}$

721 $2x^2-4x+a+1=0$; **a.** concordi; **b.** entrambe positive. $[\text{a) } -1 < a \leq 1; \text{b) } -1 < a$

722 $ax^2-(1-2a)x+a-2=0$; **a.** concordi; **b.** entrambe positive; **c.** entrambe negative.
$\left[\text{a) } -\frac{1}{4} \leq a < 0 \vee a > 2; \text{b) } \nexists a; \text{c) } -\frac{1}{4} \leq a < 0 \vee a >\right.$

Somma e prodotto delle radici: applicazioni

723 Determina per quali valori di k l'equazione $x^2+10x-k=0$, nell'incognita x, ha:
a. somma dei reciproci delle radici uguale a 5;
b. somma dei quadrati delle radici uguale a 120; $[\text{a) } k=2; \text{b) } k=$

IN 4 PASSI

1. Determina per quali valori di k esistono soluzioni reali.
2. Esprimi la somma s e il prodotto p delle radici in funzione di k.
3. Dimostra che $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{s}{p}$, imponi $\frac{s}{p}=5$ e risolvi l'equazione in k.
4. Dimostra che $x_1^2+x_2^2=s^2-2p$, imponi $s^2-2p=120$ e risolvi l'equazione in k.

Determina per quali valori del parametro le seguenti equazioni, nell'incognita x, hanno radici reali x_1 e x_2 che verificano le condizioni indicate.

724 $x^2+(2k-3)x+k^2+1=0$;
a. la somma dei quadrati delle radici è 7;
b. la somma dei reciproci delle radici è -4. $[\text{a) } k=0 \ (k=6 \text{ non accettabile}); \text{b) } \nexists k \in \mathbb{R}$

725 $2x^2+(2m-1)x-m=0$;
a. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=4$; **b.** $x_1^2+x_2^2=\frac{1}{2}$. $\left[\text{a) } m=-\frac{1}{2}; \text{b) } m=\pm\frac{1}{2}\right.$

726 $3x^2+2(k+3)x+2k=0$;
a. la somma dei quadrati delle radici è 3;
b. la somma dei reciproci dei quadrati delle radici è 1. $\left[\text{a) } k=-\frac{3}{2}; \text{b) } k=-3\right]$

727 $x^2+2(k+2)x+4k=0$;
a. la somma dei quadrati delle radici è 16;
b. la somma dei reciproci delle radici è 3;
c. la somma dei reciproci dei quadrati delle radici è $\frac{3}{16}$. $\left[\text{a) } k=0 \vee k=-2; \text{b) } k=-\frac{2}{7}; \text{c) } k=-4\right]$

728 $x^2-6kx-1+6k=0$;
a. la somma dei reciproci delle radici è 0,5;
b. la somma dei quadrati delle radici è 5;
c. la somma dei reciproci dei quadrati delle radici è 1. $\left[\text{a) } k=-\frac{1}{6}; \text{b) } k=\frac{1}{2} \vee k=-\frac{1}{6}; \text{c) } \nexists k \in \mathbb{R}\right]$

729 $ax^2-4x-3=0$, con $a \neq 0$;
a. la somma dei reciproci delle radici è $-\frac{4}{3}$;
b. la somma dei quadrati delle radici è 1. $\left[\text{a) } a \geq -\frac{4}{3} \wedge a \neq 0; \text{b) } a=8 \ (a=-2 \text{ non accettabile})\right]$

ESERCIZI

b. La somma dei reciproci delle soluzioni si traduce in $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{s}{p}=\frac{-2k}{2k-1}$.

Deve essere:

$$\frac{-2k}{2k-1}=4,\ \text{con } k\neq\frac{1}{2} \;\rightarrow\; -2k=8k-4 \;\rightarrow\; 10k=4 \;\rightarrow\; k=\frac{2}{5}.$$

c. La somma dei quadrati delle soluzioni si calcola con $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=s^2-2p$.

Sostituiamo e otteniamo:

$$(-2k)^2-2(2k-1)=26 \;\rightarrow\; 4k^2-4k+2=26;$$

$$k^2-k-6=0 \;\rightarrow\; \Delta=1+24=25, \quad k=\frac{1\pm5}{2} \;\rightarrow\; k_1=-2 \vee k_2=3.$$

In generale.

Concludiamo compilando una tabella per le condizioni più frequenti sulle soluzioni.

la somma delle soluzioni è h	$x_1+x_2=s=-\frac{b}{a}=h$	le soluzioni sono opposte	$x_1=-x_2 \rightarrow x_1+x_2=0 \rightarrow s=0$
il prodotto delle soluzioni è h	$x_1x_2=p=\frac{c}{a}=h$	la somma dei quadrati delle soluzioni è h	$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=h \rightarrow s^2-2p=h$
le soluzioni sono reciproche	$x_1=\frac{1}{x_2} \rightarrow x_1x_2=1 \rightarrow p=1$	la somma dei reciproci delle soluzioni è h	$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=h \rightarrow \frac{s}{p}=h$

Determina per quali valori del parametro le seguenti equazioni, nell'incognita x, hanno radici x_1 e x_2 che verificano le condizioni indicate.

740 $(k-1)x^2+2kx-(3-k)=0$, con $k\neq1$;
- **a.** le soluzioni sono reali e distinte;
- **b.** la somma delle soluzioni vale -8;
- **c.** il prodotto delle soluzioni è 5.

$\left[\text{a) } k>\frac{3}{4}\wedge k\neq1;\ \text{b) } k=\frac{4}{3};\ \text{c) } \nexists k\in\mathbb{R}\right]$

741 $(k-2)x^2-2kx+(k+1)=0$, con $k\neq2$;
- **a.** le radici sono reali;
- **b.** la somma delle radici è positiva;
- **c.** il prodotto delle radici è uguale al quadruplo della loro somma.

$\left[\text{a) } k\geq-2\wedge k\neq2;\ \text{b) } -2\leq k<0\vee k>2;\ \text{c) } k=\frac{1}{7}\right]$

742 $k^2x^2-2(k+2)x-1=0$, con $k\neq0$;
- **a.** le radici sono reali;
- **b.** le radici sono reciproche;
- **c.** le radici sono opposte;
- **d.** la somma delle radici è positiva;
- **e.** le radici sono concordi.

$[\text{a) } \forall k\in\mathbb{R},\ k\neq0;\ \text{b) } \nexists k\in\mathbb{R};\ \text{c) } k=-2;\ \text{d) } k>-2\wedge k\neq0;\ \text{e) } \nexists k\in\mathbb{R}]$

743 $kx^2+(3k+1)x+(k+3)=0$, con $k\neq0$;
- **a.** le radici sono reali e distinte;
- **b.** una radice è nulla;
- **c.** le radici sono opposte;
- **d.** $x_1^2+x_2^2=8$;
- **e.** $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{1}{4}$.

$\left[\text{a) } \left(k<\frac{1}{5}\wedge k\neq0\right)\vee k>1;\ \text{b) } k=-3;\ \text{c) } k=-\frac{1}{3};\ \text{d) } k=\pm1;\ \text{e) } k=-\frac{1}{3}\right]$

753 ★★ $(a+1)x^2-2(a-1)x+2a-5=0$, con $a\neq-1$;

a. le radici sono reali e coincidenti;
b. una radice è nulla;
c. le radici sono reciproche;
d. una radice è -2;
e. una radice è l'opposto del reciproco dell'altra;
f. la somma dei quadrati delle radici è $\frac{1}{2}$.

$\left[\text{a) } a=-2 \vee a=3;\ \text{b) } a=\frac{5}{2};\ \text{c) } \nexists a\in\mathbb{R};\ \text{d) } a=\frac{1}{2};\ \text{e) } a=\frac{4}{3};\ \text{f) } a=3\right]$

754 ★ $x^2-5x+k+1=0$;

a. le radici sono uguali;
b. le radici sono concordi;
c. la somma dei reciproci delle radici è 3;
d. la somma dei quadrati dei reciproci delle radici è $\frac{7}{5}$.

$\left[\text{a) } k=\frac{21}{4};\ \text{b) } -1<k\leq\frac{21}{4};\ \text{c) } k=\frac{2}{3};\ \text{d) } k=-6 \vee k=\frac{18}{7}\right]$

755 ★ $x^2+kx+k-1=0$;

a. $3x_1+3x_2+x_1x_2+7=0$;
b. una radice è nulla; determina l'altra;
c. la somma delle radici è uguale al loro prodotto;
d. la somma delle radici è uguale al quadrato del loro prodotto.

$\left[\text{a) } k=3;\ \text{b) } k=1,\ x=-1;\ \text{c) } k=\frac{1}{2};\ \text{d) } \nexists k\in\mathbb{R}\right]$

756 ★ $10x^2+2(5k-1)x-k=0$;

a. le radici sono discordi;
b. una radice è nulla;
c. la somma dei quadrati delle radici è $\frac{7}{25}$;
d. la somma dei reciproci delle radici è 2.

$\left[\text{a) } k>0;\ \text{b) } k=0;\ \text{c) } k=-\frac{2}{5} \vee k=\frac{3}{5};\ \text{d) } k=\frac{1}{4}\right]$

757 ★★ $kx^2+2(k-1)x+k-3=0$, con $k\neq0$;

a. la somma delle soluzioni è negativa;
b. il prodotto delle soluzioni è negativo;
c. una soluzione è -1;
d. una soluzione è la metà dell'altra.

$\left[\text{a) } -1\leq k<0 \vee k>1;\ \text{b) } 0<k<3;\ \text{c) } \nexists k\in\mathbb{R};\ \text{d) } k=\frac{11\pm3\sqrt{17}}{2}\right]$

758 ★★ $(2-k)x^2+2kx+1=0$, con $k\neq2$;

a. $(x_1-x_2)^2=40$;
b. la somma delle soluzioni è negativa;
c. le soluzioni sono opposte;
d. una soluzione x_1 è tale che $|x_1|=1$.

$\left[\text{a) } k=\frac{14}{9},\ k=3;\ \text{b) } 1<k<2;\ \text{c) } \nexists k\in\mathbb{R};\ \text{d) } k=1 \vee k=-3\right]$

759 ★★ $(k+2)x^2-2kx-(k-3)=0$, con $k\neq-2$;

a. le radici sono discordi;
b. una radice è nulla;
c. il prodotto delle radici è uguale al doppio della loro somma;
d. $|x_1-x_2|=6$;
e. le radici sono negative.

$\left[\text{a) } k<-2 \vee k>3;\ \text{b) } k=3;\ \text{c) } \nexists k\in\mathbb{R};\ \text{d) } k=\frac{-37\pm\sqrt{193}}{14};\ \text{e) } -2<k\leq-\frac{3}{2}\right]$

760 ★★ $x^2+6x+9-m^2=0$;

a. una radice è nulla;
b. $\frac{x_2+x_1}{x_2-x_1}=-\frac{1}{3}$;
c. le radici sono positive;
d. $x_1-2x_2=-1$.

$\left[\text{a) } m=\pm3;\ \text{b) } m=\pm9;\ \text{c) } \nexists m\in\mathbb{R};\ \text{d) } m=\pm\frac{4}{3}\right]$

761 ★★ $(k+2)x^2-2kx+k-3=0$, con $k\neq-2$;

a. le soluzioni sono reali;
b. le radici sono concordi;
c. una soluzione è uguale a -3;
d. la somma delle soluzioni è uguale a quella dei loro reciproci.

$\left[\text{a) } k\geq-6 \wedge k\neq-2;\ \text{b) } -6\leq k<-2 \vee k>3;\ \text{c) } k=-\frac{15}{16};\ \text{d) } k=0\right]$

ESERCIZI

ALLENATI SULLE COMPETENZE

Argomentare e dimostrare

1 Dimostra che, se un'equazione di secondo grado ha una soluzione nulla, allora l'equazione è incompleta.

2 **SPIEGALO TU** Le equazioni $x - \frac{5x}{x+2} = \frac{10}{x+2}$ e $x^2 - 3x - 10 = 0$ non sono equivalenti. Perché?

3 Dopo aver dimostrato che l'equazione $3x^2 - (a^3 + 1)x - a^2 = 0$ ammette sempre due soluzioni reali, spiega perché non possono essere concordi.

4 Se il discriminante Δ dell'equazione $x^2 + bx + c = 0$ è positivo, allora la differenza tra la soluzione maggiore e quella minore è $\sqrt{\Delta}$.

5 **VERO O FALSO?** L'equazione $(m^2 - 16)x^2 + 2mx + 1 = 0$, nell'incognita x:

a. è di primo grado per $m = \pm 4$. V F
b. è determinata in $\mathbb{R}$ $\forall m \in \mathbb{R}$. V F
c. è pura per $m = -2$. V F
d. ha radici opposte per $m = 0$. V F
e. è completa per $m \neq \pm 4 \wedge m \neq 0$. V F

6 **FAI UN ESEMPIO** Scrivi tre equazioni di secondo grado, una completa, una spuria e una pura, che abbiano una soluzione in comune.

Utilizzare tecniche e procedure di calcolo

Risolvi le seguenti equazioni numeriche intere.

7 $3(x-2)(x+2) - x = (x-1)^2 + 2(4x-9)$ $\left[1; \frac{5}{2}\right]$

8 $(2x-1)(1+2x) + 3 + 2(2x+1)^2 = 2(2x)^2$ [-1 doppia]

9 $\frac{1}{2}(x^2 - 6x) + (6-x)^2 + 3(x-12) = 0$ $[0; 8]$

10 $3x + (2x+3)(4-x) + (x+3)^2 - (4-2x)(4+2x) - 45 = 0$ $\left[-\frac{20}{3}; +2\right]$

11 $\frac{(3x+1)^2}{9} - \frac{(6x+1)^2}{36} + \frac{(2x+1)^2}{4} = 0$ $\left[-1; -\frac{1}{3}\right]$

12 $\frac{x^2 + 18x - 43}{18} - \frac{(2+x)^2}{12} + \frac{(1-2x)^2}{6} = 0$ $[\pm 2]$

13 $\frac{x^2 - x\sqrt{2} + 3 + 2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{1-x^2}{1-\sqrt{2}}$ $\left[\frac{-2-\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right]$

14 $\left(3x - \frac{1}{2}\right)\left(3x + \frac{1}{2}\right) + (2x-1)^2(2x+1) = (2x-1)^3 + 8x^2 + \frac{11}{4}$ $\left[-\frac{1}{9}; 1\right]$

15 $(x+\sqrt{5})^2 - (x-\sqrt{5})^2 - 15 = (x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5}) + 10$ [$2\sqrt{5}$ doppia]

PER LA VERIFICA

37 $\dfrac{4}{x^2-4}-\dfrac{1}{3(x+2)^2}=\dfrac{4}{x^2+x-6}+\dfrac{5}{(x^2-4)(x+3)}$ $[-4;0]$

38 $\dfrac{x^2-x-2}{2x^2+3x+5}\cdot\left(\dfrac{x+4}{x-1}+\dfrac{x-1}{x+1}\right)+\left(2-\dfrac{1}{1-x}\right)^2-\dfrac{x+3}{1-x}=0$ $\left[0;\dfrac{5}{6}\right]$

39 $\dfrac{3}{x^2-2x+1}+\dfrac{2}{x^2+2x-3}=\dfrac{2}{x^2-x}+\dfrac{12}{x^4+x^3-5x^2+3x}$ $[-2]$

40 $\left(2-\dfrac{x}{3}\right)x-\dfrac{2x-5}{12}=\dfrac{2x+1}{4}-3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{\frac{1}{6}(x+5)+\frac{1}{3}x^3(13-x)}{x^2-1}$ $[-9;0]$

41 $\dfrac{2x-1}{1-x}:\dfrac{6+2x}{x^2-1}+\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+4+4x}:\dfrac{x^2+9+6x}{x^2+3x+2}=\dfrac{5-2x^2}{4+2x}$ $[1\pm\sqrt{6}]$

42 $\dfrac{\dfrac{x+3}{2x}-\dfrac{x-3}{x+1}}{\dfrac{x-2}{x-1}-\dfrac{x+1}{x}}-\dfrac{x^2-3x}{4x-2}+\dfrac{\dfrac{x^2}{2}}{2x^2+x-1}=0$ $\left[-\dfrac{1}{4};\dfrac{3}{2}\right]$

Risolvi le seguenti equazioni letterali, effettuando la discussione se necessario.

43 $2px^2+(p^2-2)x-p=0$ $\left[p\neq 0: \dfrac{1}{p}, -\dfrac{p}{2}; p=0: 0\right]$

44 $(b+1)x^2+2bx+b=1$ $\left[b\neq -1: -1, \dfrac{1-b}{b+1}; b=-1: -1\right]$

45 $ax^2-2(2a+1)x+8=0$ $\left[a=0: 4; a=-\dfrac{1}{2}: 4 \text{ doppia}; a\neq 0 \wedge a\neq \dfrac{1}{2}: \dfrac{2}{a}, 4\right]$

46 $(a-2)x^2+(3a-8)x-6=0$ $\left[a=2: -3; a=\dfrac{4}{3}: -3 \text{ doppia}; a\neq 2 \wedge a\neq \dfrac{4}{3}: -3; \dfrac{2}{a-2}\right]$

47 $\dfrac{a(x^2+2)+24}{a+4}=3x$ $\left[a=-4: \text{perde significato}; a=0: 2; a=12: 2 \text{ doppia}; a\neq 0 \wedge a\neq -4 \wedge a\neq 12: 2, \dfrac{a+12}{a}\right]$

48 $\dfrac{x}{a}=2-\dfrac{a-2}{x-2}$ $[a=0: \text{perde significato}; a=2: 4; a\neq 0 \wedge a\neq 2: a, a+2]$

49 $\left(\dfrac{b}{2x+b}+1\right)\dfrac{b}{x}-\dfrac{x}{2x+b}=0$ $[b\neq 0: (1\pm\sqrt{3})b; b=0: \text{imp.}]$

50 $\dfrac{2x-k}{x+k}=\dfrac{6k^2}{x^2-k^2}+\dfrac{k+x}{x-k}$ $[k\neq 0: 6k; k=0: \text{imp.}]$

51 $1+\dfrac{11k-2k^2-2x}{2kx+k^2}=\dfrac{3k-x}{kx}$ $\left[k=0: \text{perde significato}; k\neq 0 \wedge k\neq \pm 6: \dfrac{k}{2}, -3; k=-6: -3 \text{ doppia}; k=6: 3\right]$

52 $\dfrac{1}{b}+\dfrac{x-1}{b+x}=\dfrac{x+b}{1-x}-b$ $[b=0: \text{perde significato}; b=-1: \text{ind. } \forall x\neq 1; b\neq 0 \wedge b\neq \pm 1: 0, 1-b; b=1: 0 \text{ doppia}]$

53 Stabilisci per quale valore di a l'equazione $2x^2+(a-1)x-(a+2)=0$ ha:

a. somma delle radici uguale a quella dell'equazione $2x^2+3x-5=0$;

b. prodotto delle radici opposto a quello dell'equazione $4x^2-x-8=0$. [a) 4; b) -6]

Determina i valori del parametro per i quali le seguenti equazioni, nell'incognita *x*, soddisfano le condizioni indicate.

54 $5x^2+(2-10a)x+5a^2-3=0$;

a. le radici sono reali e distinte;

b. la somma delle radici è positiva;

c. il prodotto delle radici è nullo;

d. la somma delle radici è uguale al loro prodotto.

$\left[\text{a) } a<\dfrac{8}{5}; \text{ b) } \dfrac{1}{5}<a\leq\dfrac{8}{5}; \text{ c) } a=\pm\sqrt{\dfrac{3}{5}}; \text{ d) } a=1-\dfrac{\sqrt{30}}{5}\right]$

PER LA VERIFICA

37 $\dfrac{4}{x^2-4}-\dfrac{1}{3(x+2)^2}=\dfrac{4}{x^2+x-6}+\dfrac{5}{(x^2-4)(x+3)}$ $[-4;0]$

38 $\dfrac{x^2-x-2}{2x^2+3x+5}\cdot\left(\dfrac{x+4}{x-1}+\dfrac{x-1}{x+1}\right)+\left(2-\dfrac{1}{1-x}\right)^2-\dfrac{x+3}{1-x}=0$ $\left[0;\dfrac{5}{6}\right]$

39 $\dfrac{3}{x^2-2x+1}+\dfrac{2}{x^2+2x-3}=\dfrac{2}{x^2-x}+\dfrac{12}{x^4+x^3-5x^2+3x}$ $[-2]$

40 $\left(2-\dfrac{x}{3}\right)x-\dfrac{2x-5}{12}=\dfrac{2x+1}{4}-3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{\frac{1}{6}(x+5)+\frac{1}{3}x^3(13-x)}{x^2-1}$ $[-9;0]$

41 $\dfrac{2x-1}{1-x}:\dfrac{6+2x}{x^2-1}+\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+4+4x}:\dfrac{x^2+9+6x}{x^2+3x+2}=\dfrac{5-2x^2}{4+2x}$ $[1\pm\sqrt{6}]$

42 $\dfrac{\dfrac{x+3}{2x}-\dfrac{x-3}{x+1}}{\dfrac{x-2}{x-1}-\dfrac{x+1}{x}}-\dfrac{x^2-3x}{4x-2}+\dfrac{\dfrac{x^2}{2}}{2x^2+x-1}=0$ $\left[-\dfrac{1}{4};\dfrac{3}{2}\right]$

Risolvi le seguenti equazioni letterali, effettuando la discussione se necessario.

43 $2px^2+(p^2-2)x-p=0$ $\left[p\neq 0: \dfrac{1}{p}, -\dfrac{p}{2}; p=0: 0\right]$

44 $(b+1)x^2+2bx+b=1$ $\left[b\neq -1: -1, \dfrac{1-b}{b+1}; b=-1: -1\right]$

45 $ax^2-2(2a+1)x+8=0$ $\left[a=0: 4; a=\dfrac{1}{2}: 4 \text{ doppia}; a\neq 0 \wedge a\neq \dfrac{1}{2}: \dfrac{2}{a}, 4\right]$

46 $(a-2)x^2+(3a-8)x-6=0$ $\left[a=2: -3; a=\dfrac{4}{3}: -3 \text{ doppia}; a\neq 2 \wedge a\neq \dfrac{4}{3}: -3; \dfrac{2}{a-2}\right]$

47 $\dfrac{a(x^2+2)+24}{a+4}=3x$ $\left[a=-4\text{: perde significato}; a=0: 2; a=12: 2 \text{ doppia}; a\neq 0 \wedge a\neq -4 \wedge a\neq 12: 2, \dfrac{a+12}{a}\right]$

48 $\dfrac{x}{a}=2-\dfrac{a-2}{x-2}$ $[a=0\text{: perde significato}; a=2: 4; a\neq 0 \wedge a\neq 2: a, a+2]$

49 $\left(\dfrac{b}{2x+b}+1\right)\dfrac{b}{x}-\dfrac{x}{2x+b}=0$ $[b\neq 0: (1\pm\sqrt{3})b; b=0\text{: imp.}]$

50 $\dfrac{2x-k}{x+k}=\dfrac{6k^2}{x^2-k^2}+\dfrac{k+x}{x-k}$ $[k\neq 0: 6k; k=0\text{: imp.}]$

51 $1+\dfrac{11k-2k^2-2x}{2kx+k^2}=\dfrac{3k-x}{kx}$ $\left[k=0\text{: perde significato}; k\neq 0 \wedge k\neq \pm 6: \dfrac{k}{2}, -3; k=-6: -3 \text{ doppia}; k=6: 3\right]$

52 $\dfrac{1}{b}+\dfrac{x-1}{b+x}=\dfrac{x+b}{1-x}-b$ $[b=0\text{: perde significato}; b=-1\text{: ind. } \forall x\neq 1; b\neq 0 \wedge b\neq \pm 1: 0, 1-b; b=1: 0 \text{ doppia}]$

53 Stabilisci per quale valore di a l'equazione $2x^2+(a-1)x-(a+2)=0$ ha:
a. somma delle radici uguale a quella dell'equazione $2x^2+3x-5=0$;
b. prodotto delle radici opposto a quello dell'equazione $4x^2-x-8=0$. [a) 4; b) -6]

Determina i valori del parametro per i quali le seguenti equazioni, nell'incognita *x*, soddisfano le condizioni indicate.

54 $5x^2+(2-10a)x+5a^2-3=0$;
a. le radici sono reali e distinte;
b. la somma delle radici è positiva;
c. il prodotto delle radici è nullo;
d. la somma delle radici è uguale al loro prodotto.

$\left[\text{a) } a<\dfrac{8}{5}; \text{ b) } \dfrac{1}{5}<a\leq\dfrac{8}{5}; \text{ c) } a=\pm\sqrt{\dfrac{3}{5}}; \text{ d) } a=1-\dfrac{\sqrt{30}}{5}\right]$

PER LA VERIFICA

391 $\dfrac{-x^2-x+6}{(x-\sqrt{2})^2}>0$ $[-3<x<2 \wedge x\neq\sqrt{2}]$

392 $\dfrac{5-x}{\sqrt{2}\,x^2+2x-4\sqrt{2}}>0$ $[x<-2\sqrt{2} \vee \sqrt{2}<x<5]$

393 $\dfrac{10+x^2+x}{(x-3)^2}\geq 0$ $[x\neq 3]$

394 $\dfrac{x^2-7x+12}{2x+1}>0$ $\left[-\frac{1}{2}<x<3 \vee x>4\right]$

395 $\dfrac{2x^2+7x-15}{-3x^2+7x-2}<0$ $\left[x<-5 \vee \frac{1}{3}<x<\frac{3}{2} \vee x>2\right]$

396 **AL VOLO** $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2+6x+9}\leq 0$

397 $\dfrac{x-3-2x^2}{5-x}>0$ $[x>5]$

398 $\dfrac{4x-x^2}{x+8}\geq 0$ $[x<-8 \vee 0\leq x\leq 4]$

399 $\dfrac{x^2+9}{x^2-3x+2}\geq 0$ $[x<1 \vee x>2]$

400 $\dfrac{7x-2-3x^2}{3x+5}<0$ $\left[-\frac{5}{3}<x<\frac{1}{3} \vee x>2\right]$

401 $\dfrac{2x^2+8}{x^3-4x^2-5x}\leq 0$ $[x<-1 \vee 0<x<5]$

402 $\dfrac{x^2-2x}{x^2(x-6)}>0$ $[0<x<2 \vee x>6]$

403 $\dfrac{x-x^3}{4x^2-9}\leq 0$ $\left[-\frac{3}{2}<x\leq -1 \vee 0\leq x\leq 1 \vee x>\frac{3}{2}\right]$

404 $\dfrac{4x^2+2}{x^2+x^3}<0$ $[x<-1]$

405 $\dfrac{3+x^2}{x^2-5x+6}\geq 0$ $[x<2 \vee x>3]$

406 $\dfrac{x^3(3x-1)^2}{-x^2-11}<0$ $\left[x>0 \wedge x\neq\frac{1}{3}\right]$

407 $\dfrac{16-x^4}{27-x^3}>0$ $[-2<x<2 \vee x>3]$

408 $\dfrac{3x^2+5x-2}{x^2+3x}\leq 0$ $\left[-3<x\leq -2 \vee 0<x\leq\frac{1}{3}\right]$

409 $\dfrac{2x^2+5\sqrt{2}\,x+4}{x^2-2}\leq 0$ $\left[-2\sqrt{2}\leq x<-\sqrt{2} \vee -\frac{\sqrt{2}}{2}\leq x<\sqrt{2}\right]$

410 $\dfrac{x^3-4\sqrt{2}\,x^2+6x}{(x-1)^5}\leq 0$ $[0\leq x<1 \vee \sqrt{2}\leq x\leq 3\sqrt{2}]$

411 $\dfrac{x-3x^2}{(x-5)(x^2-3x+4)}<0$ $\left[0<x<\frac{1}{3} \vee x>5\right]$

412 $\dfrac{(x-1)^2(x+8)}{x^3-16x}\geq 0$ $[x\leq -8 \vee -4<x<0 \vee x=1 \vee x>4]$

413 $\dfrac{x(2x^2+7x-4)}{(2-x)^3}<0$ $\left[x<-4 \vee 0<x<\frac{1}{2} \vee x>2\right]$

414 $\dfrac{x^4+8x^2-9}{x(3-x)}\geq 0$ $[-1\leq x<0 \vee 1\leq x<3]$

415 $\dfrac{3x^3+x}{4x^2-11x+6}>0$ $\left[0<x<\frac{3}{4} \vee x>2\right]$

416 $\dfrac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^5(x^2+4)}{64+x^3}\geq 0$ $\left[x<-4 \vee x\geq\frac{1}{2}\right]$

417 $\dfrac{(2x^2+4x+2)(-x^2-25)}{(3x+4)^2(-5x-6)^3}<0$ $\left[x<-\frac{6}{5} \wedge x\neq -\frac{4}{3}\right]$

418 $\dfrac{x^2(-36-x^2)}{(-x^2-x-1)(x^2+10x+25)}\leq 0$ $[x=0]$

419 $\dfrac{(4x^2+20x+25)(x^2+16)}{(7x+21)^2}>0$ $\left[x\neq -3 \wedge x\neq -\frac{5}{2}\right]$

420 $\dfrac{(x^2+1)(2x+3)}{(x^2+2x-8)(x^2-8x+16)}>0$ $\left[-4<x<-\frac{3}{2} \vee 2<x<4 \vee x>4\right]$

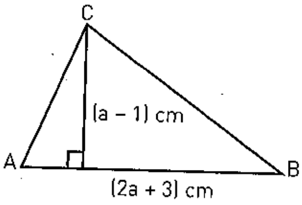
421 **ASSOCIA** ogni disequazione alla soluzione corrispondente.

a. $\dfrac{(x-2)^2}{x^2-2x-3}\leq 0$ **b.** $-\dfrac{(x-2)^2}{x^2-2x-3}>0$ **c.** $\dfrac{x^2-2x-3}{x^4}<0$ **d.** $\dfrac{x^4(x^2-2x-3)}{(x-2)^2}\geq 0$

1. $x\leq -1 \vee x=0 \vee x\geq 3$ **2.** $-1<x<3$ **3.** $-1<x<0 \vee 0<x<3$ **4.** $-1<x<2 \vee 2<x<3$

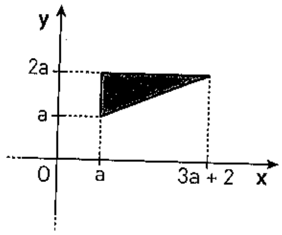
ESERCIZI

525 ★★ **YOU & MATHS** Find the values of a such that the triangle shown below has an area between 1,5 cm^2 and 3,5 cm^2 (excluding the extreme values).



[1,5 cm $< a <$ 2 cm]

526 ★ **LEGGI IL GRAFICO** Considera il triangol
figura e determina per quali valori positivi
la sua area è compresa strettamente tra 2 e



[$1 < a$

Sistemi con disequazioni fratte

527 ★ Risolvi il sistema $\begin{cases} 3x^2 + 10x - 8 > 0 \\ \dfrac{2x}{4-x} \leq 0 \end{cases}$. [$x < -4 \vee x$

IN 3 PASSI

1. Risolvi le due disequazioni, costruendo per la seconda il quadro dei segni e prendendo gli intervalli cui $\frac{N}{D} \leq 0$.
2. Compila lo schema delle soluzioni delle due disequazioni.
3. Deduci le soluzioni del sistema mediante l'intersezione dei due insiemi soluzione.

Risolvi i seguenti sistemi.

528 ★ $\begin{cases} \dfrac{1}{y-2} \geq 0 \\ 3y^2 - 11y > 42 \end{cases}$ [$y > 6$]

529 ★ $\begin{cases} \dfrac{-2}{x+1} \geq 0 \\ 9x^2 + 6x + 1 > 0 \end{cases}$ [$x < -1$]

530 ★ $\begin{cases} \dfrac{2x+4}{x} \leq 0 \\ x^2 - 6x \geq 0 \end{cases}$ [$-2 \leq x < 0$]

531 ★ $\begin{cases} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{6x} \geq 0 \\ 2x - 1 > 0 \end{cases}$ [$\frac{1}{2} < x \leq 1 \vee x \geq 5$]

532 ★ $\begin{cases} 2x^2 - \sqrt{3}\,x - 3 \geq 0 \\ \dfrac{x^2 - 3}{x+1} < 0 \end{cases}$ [$x < -\sqrt{3} \vee -1 < x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$]

533 ★ $\begin{cases} \dfrac{10}{a-1} > \dfrac{a^2 - 7a}{1-a} \\ a^2 < 9 \end{cases}$ [$1 < a < 2$]

534 ★ $\begin{cases} 3x + 7 > (3x+7)^2 \\ \dfrac{1}{x - \sqrt{3}} > x \end{cases}$ [$-\frac{7}{3} < x < -2$]

535 ★ $\begin{cases} x < x^2 \\ \dfrac{1 - 2x^2}{1 - x^2} \geq 2 \end{cases}$ [$x < -1 \vee x > 1$]

536 ★ $\begin{cases} -x^2 + 3x + 4 < 0 \\ x - 1 \geq \dfrac{8 - 4x}{x - 2} \end{cases}$ [$-3 \leq x < -1 \vee x$

537 ★ $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4x^2 - 1} \geq \dfrac{1}{4} \\ x^2 - 9x \leq 0 \end{cases}$ [$\frac{1}{2} < x$

538 ★ $\begin{cases} 2x^2 - 15x - 8 \leq 0 \\ \dfrac{x^2}{x - x^2} \leq \dfrac{1}{x-1} \end{cases}$ [$1 < x$

539 ★ $\begin{cases} \dfrac{2}{2-x} < \dfrac{1}{x^2 - x - 2} \\ x^2 + 2x > 3 \end{cases}$ [x

540 ★ $\begin{cases} \dfrac{7}{x-3} \leq 4x \\ x^2 - 2x < 10(-x+2) \end{cases}$ [$-\frac{1}{2} \leq x <$

541 ★ $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2 - 4} \geq \dfrac{1}{x^2 + 2x} \\ (1-x)^2 + 2 > -x^2 + 2x \end{cases}$ [$-2 < x < 0 \vee x$

542 ★ $\begin{cases} \dfrac{3(2-x)^2}{x} - 1 \geq 2x \\ x(8-x) \geq 7 \end{cases}$ [$x =$

543 ★ $\begin{cases} x(x-1) \leq 0 \\ \dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 + x - 2} > 0 \end{cases}$ [$0 \leq x <$

544 $\begin{cases} \dfrac{x-7}{x+3} < 0 \\ \left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2 - 3x(4+x) \geq \dfrac{25}{4} \end{cases}$ $\left[-3 < x \leq -\frac{1}{2}\right]$

545 $\begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1} - \dfrac{x-5}{x+3} \geq \dfrac{x+1}{x^2+2x-3} \\ 2x^2 - 3x + 1 \leq 0 \end{cases}$ [impossibile]

546 $\begin{cases} \dfrac{x^2-3x}{2-x} > 0 \\ \dfrac{3x}{x+4} < 0 \end{cases}$ $[-4 < x < 0]$

547 **AL VOLO** $\begin{cases} \dfrac{x^2-7}{4+x^2} < 0 \\ \dfrac{x^2+6x+9}{x^2-7} > 0 \end{cases}$

548 $\begin{cases} \dfrac{3}{x-2} > 1 \\ \dfrac{x-5}{x-x^2} < 0 \end{cases}$ [impossibile]

549 $\begin{cases} \dfrac{3}{2x} - \dfrac{5}{x+1} > 0 \\ \dfrac{-2x}{x^2+4} \leq 0 \end{cases}$ $\left[0 < x < \frac{3}{7}\right]$

550 $\begin{cases} \dfrac{x^2-3x}{x+2} > 0 \\ \dfrac{3}{x} + 2 > 0 \end{cases}$ $\left[-2 < x < -\frac{3}{2} \vee x > 3\right]$

551 $\begin{cases} \dfrac{1-x}{2x-3} > 1 \\ \dfrac{x}{x-2} \geq \dfrac{2x-1}{x} \end{cases}$ [impossibile]

552 $\begin{cases} 3 \geq \dfrac{x^2}{3} \\ x^2 \geq 4(x-1) \\ \dfrac{3x}{x-2} \geq 1 \end{cases}$ $[-3 \leq x \leq -1 \vee 2 < x \leq 3]$

553 $\begin{cases} x^2 - 6x < 0 \\ \dfrac{x}{2} \geq 1 \\ \dfrac{2}{3x-6} < -\dfrac{1}{x} \end{cases}$ [impossibile]

554 **AL VOLO** $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+4x+4} > 0 \\ \dfrac{3x}{-x^2-5} > 0 \end{cases}$

555 $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+1} < 1 \\ \dfrac{x+1}{2-x^2} < 2 \end{cases}$

$\left[x < -\frac{3}{2} \vee -\sqrt{2} < x < 1 \vee x > \sqrt{2} \wedge x \neq 0\right]$

556 $\begin{cases} \dfrac{x^2-x}{x+2} \geq 2 \\ \dfrac{9-x^2}{3x-x^2-3} < 0 \end{cases}$ $[-2 < x \leq -1]$

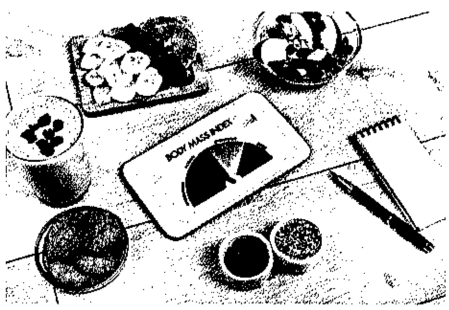
557 $\begin{cases} \dfrac{24}{x^2-4} > \dfrac{3x}{x-2} \\ \dfrac{16}{x-1} - \dfrac{3x}{1-x} \geq 0 \end{cases}$ [impossibile]

558 $\begin{cases} \dfrac{x+6}{5x} \geq \dfrac{x}{5} \\ (x-3)^2 + 3x^2 - 2 \leq (2x-1)^2 \\ (x+3)^2 > x^2 - 7x + 9 - (1-13x) \end{cases}$ $[x = 3]$

559 $\begin{cases} \dfrac{-x^2+3x+4}{x} \geq 0 \\ \dfrac{3-x}{x-2} \leq \dfrac{1-x}{x} \end{cases}$ $[0 < x < 2]$

560 $\begin{cases} \dfrac{x}{x-5} \leq 3 \\ \dfrac{x^2-2x+1}{2-x} \leq 0 \end{cases}$ $\left[x = 1 \vee 2 < x < 5 \vee x \geq \frac{15}{2}\right]$

561 **MEDICINA** La valutazione della forma fisica di una persona può essere stimata approssimativamente con l'indice di massa corporea, BMI (dall'inglese *Body Mass Index*). Se m è la massa dell'individuo, in kilogrammi, e h è la sua altezza, in metri, l'indice di massa corporea, in kg/m^2, è: $\text{BMI} = \dfrac{m}{h^2}$.



Una persona è normopeso se il BMI è compreso tra 18,5 e 24,9. Se un individuo ha una massa di 60 kg, quanto dovrebbe essere alto per essere considerato normopeso? [da 1,55 m a 1,80 m]

IN 3 PASSI

1. Osserva che la massa m è nota, mentre h è l'incognita del problema, con $h > 0$.
2. La condizione di un BMI compreso tra 18,5 e 24,9 si traduce in due disequazioni fratte.
3. Poni a sistema le disequazioni trovate e calcolane la soluzione.

ESERCIZI

611 Stabilisci per quali valori di a l'equazione $\sqrt{2}x^2-(a-3)x-2\sqrt{2}=0$ ha due soluzioni reali distinte. $[\forall a \in \mathbb{R}]$

612 Trova i valori di k per i quali l'equazione $2x^2-kx+1=0$ risulta impossibile. $[-2\sqrt{2}<k<2\sqrt{2}]$

613 Determina i valori di a per i quali l'equa $ax^2-(4a-1)x-3=0$ ammette soluzioni $[\forall a$

614 Stabilisci per quali valori di b l'equa $-x^2+(b+1)x+b+1=0$ non ammette zioni reali. $[-5<b$

COME SI FA

▶ **Determiniamo per quali valori del parametro k l'equazione $2x^2-(4-k)x+k^2-3k+2=0$ amm soluzioni reali discordi.**

Le soluzioni sono reali distinte se $\Delta>0$ e sono discordi se il loro prodotto è negativo.

Nell'equazione $ax^2+bx+c=0$ il prodotto delle soluzioni è $p=\frac{c}{a}$.

Risolviamo quindi il sistema $\begin{cases}\Delta>0\\ \frac{k^2-3k+2}{2}<0\end{cases}$.

- Risolviamo la prima disequazione.

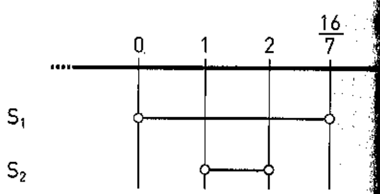
$$\Delta=(4-k)^2-8(k^2-3k+2)=16-8k+k^2-8k^2+24k-16=-7k^2+16k=k(-7k+16)$$

$$\Delta>0 \rightarrow S_1: 0<k<\frac{16}{7}$$

- Risolviamo la seconda disequazione, equivalente a $k^2-3k+2<0$.

$$\Delta=9-8=1 \rightarrow k=\frac{3\pm1}{2}=\begin{smallmatrix}\nearrow 2\\ \searrow 1\end{smallmatrix} \rightarrow S_2: 1<k<2.$$

- Rappresentiamo le soluzioni nello schema.



L'equazione data ha soluzioni reali e discordi per $1<k<2$.

615 Determina per quali valori di k le radici dell'equazione $3x^2+2(k+2)x+4k^2-1=0$ sono reali e concordi. $\left[-\frac{7}{11}<k<-\frac{1}{2}\vee\frac{1}{2}<k\leq1\right]$

616 Stabilisci quali valori di a determinano soluzioni reali e discordi nell'equazione: $(a^2-4)x^2+3ax-4=0$. $[a<-2\vee a>2]$

617 Trova per quali valori di k l'equazione

$$kx^2+2(3k-4)x+2-k=0$$

ha soluzioni la cui somma è positiva. $[0<k\leq1]$

618 Determina per quali valori di b la somma radici di $(1+b^2-2b)x^2+(4b-9)x+4=$ maggiore di 1. $\left[-4<b\leq\frac{13}{8}\wedge b\right.$

619 Determina i valori di k per i quali l'equa $(2-k)x^2+(k+2)x+2+k=0$ ammette zioni reali distinte x_1 e x_2 tali che $x_1\cdot x_2\geq$ $\left[k<-2\vee\frac{6}{5}<k<2\vee k\right.$

620 Trova per quali valori di a le radici $x_1\neq x$ $(2a^2-3a-2)x^2+2(2-a)x+1=0$ sono che $x_1\cdot x_2<\frac{1}{3}$. $\left[-3<a<-1\vee-\frac{1}{2}<a\right.$

621 Determina i valori di k per i quali l'equazione $kx^2-(k-1)x+1=0$ ha due soluzioni reali distint somma positiva e prodotto negativo. $[k$

12 ★★ **TRADUCI** **DALLE PAROLE AI SIMBOLI** Scrivi in simboli matematici le frasi seguenti, usando per le variabili le lettere che preferisci.

a. Un consiglio dell'allenatore di pallavolo: «In ogni allenamento, devi fare almeno 15 giri del campo di corsa».

b. Il numero dei partecipanti a una gita organizzata deve essere superiore a 15 e inferiore a 40.

c. Il costo totale per la stampa di alcuni volantini non supera € 150 ed è formato da un costo fisso di € 20 e da un costo variabile di € 2 a volantino.

Risolvi le seguenti disequazioni.

13 $2x+3(x-6)>x+1$ $\left[x>\frac{19}{4}\right]$

14 $3(x+5)\le 2(x+2)-(3-x)$ [impossibile]

15 $x+(x+2)(x+3)<7x+x^2+9$ $[x>-3]$

16 $\frac{x+5}{3}-\frac{3x+2}{4}<1-\frac{x+4}{6}$ $\left[x>\frac{10}{3}\right]$

17 $\frac{x-4}{7}-2\ge\frac{1}{2}[2x-5(x-1)]-\frac{1}{7}$ $[x\ge 3]$

18 $\frac{2-x}{5}-\frac{1-3x}{4}>\frac{3}{5}x+\frac{3-\frac{1}{2}x}{10}$ [impossibile]

19 $-(x+1)(1-x)\le x(x+4)$ $\left[x\ge-\frac{1}{4}\right]$

20 $(y+2)^2>y^2-4(1-y)$ $[\forall y\in\mathbb{R}]$

21 $2x+7>\sqrt{5}\,x$ $[x<7(2+\sqrt{5})]$

22 $\sqrt{2}(x+\sqrt{2})-x>(x+\sqrt{2})^2-x^2$ $[x<0]$

23 $(y+\sqrt{5})(y-\sqrt{5})\le(y+3)^2$ $\left[y\ge-\frac{7}{3}\right]$

24 $\frac{x}{1-\sqrt{5}}+\frac{3}{4}<1-\frac{x}{2}$ $\left[x>-\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right]$

25 $2x+\frac{1}{2}(\sqrt{3}\,x-1)>2\sqrt{3}\,x+\frac{x-7}{2}$ $[x<\sqrt{3}+1]$

26 $1-x+(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)+\frac{x}{\sqrt{2}}<2$ $[x>2+\sqrt{2}]$

27 $[(2x-3)(x+4)-2]-1<x(5-x)+3x^2$ $[\forall x\in\mathbb{R}]$

28 $\frac{1}{5}(x+2\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})\le\frac{x}{10}(2x-3)+3$ $[x\le 18]$

29 $15x-\frac{(x+7)(7-x)}{4}+\frac{13}{2}x-\frac{1}{2}x\left(8+\frac{x}{2}\right)\ge 0$ $\left[x\ge\frac{7}{10}\right]$

30 $\frac{(3x+1)(3x-1)}{4}-\frac{9(x+2)^2}{4}\le\frac{1}{2}\left[3x\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)^{-1}\right]$ $[\forall x\in\mathbb{R}]$

31 $1+\left[2x\left(x-\frac{1}{2}\right)-(1-x)-2x^2\right]^3>x+13$ $[x<-13]$

32 $-\frac{x\left(x-\frac{3}{4}\right)}{3}+\frac{5\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{15}\le-\left(\frac{x}{5}+\frac{2x-1}{3}\right)+\frac{\frac{1}{2}x+5}{15}$ $\left[x\le\frac{7}{17}\right]$

33 $2[(x-1)^2-(x-2)(x-1)]<-\sqrt{5}(1-x)$ $[x>1]$

34 $(2-x+x^2)^2+(3-x)^3>2x^2(x^2+7)+3x(-12-x^2)-x^4$ $\left[x>-\frac{31}{5}\right]$

35 Trova per quali valori di k l'equazione $(k-1)x^2-8x+3=0$ ha soluzioni reali. $\left[k\le\frac{19}{3}\right]$

■ **Calcoliamo il discriminante e le eventuali soluzioni dell'equazione associata.**

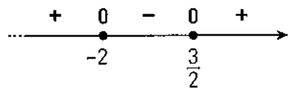
$\Delta = 1 + 48 = 49 > 0$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 7}{4} \quad \to \quad x_1 = -2, \quad x_2 = \frac{3}{2}.$

Non conviene scomporre il trinomio in fattori di primo grado e studiare il segno del prodotto: è un procedimento più laborioso.

■ **Applichiamo la regola dello studio del segno del trinomio.**

Visualizziamo le soluzioni e il segno sull'asse reale, applicando la regola.
Il trinomio è concorde con il segno del coefficiente di x^2 per valori esterni all'intervallo delle radici.



■ **Scriviamo le soluzioni.**

La disequazione richiede che il trinomio sia negativo o nullo, quindi consideriamo le due radici e i valori interni al loro intervallo.
Le soluzioni della disequazione sono:

$-2 \le x \le \frac{3}{2}.$

Solo nella conclusione teniamo conto della richiesta della disequazione.

Risolvi le seguenti disequazioni.

119 $9y^2 - 10y + 1 \le 0$ $\left[\frac{1}{9} \le y \le 1\right]$

120 $x^2 - 5x - 14 \le 0$ $[-2 \le x \le 7]$

121 $3x^2 + 12x + 9 < 0$ $[-3 < x < -1]$

122 $x^2 + 16x + 64 \le 0$ $[x = -8]$

123 $x^2 + 13x - 30 < 0$ $[-15 < x < 2]$

124 $x^2 < 16$ $[-4 < x < 4]$

125 $12x^2 - x - 1 \le 0$ $\left[-\frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{3}\right]$

126 $64x^2 + 8x + \frac{1}{4} \ge 0$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

127 $16x^2 - 9x \le 0$ $\left[0 \le x \le \frac{9}{16}\right]$

128 $4x^2 - 20x + 25 > 0$ $\left[x \ne \frac{5}{2}\right]$

129 $-10x^2 + 3x + 4 < 0$ $\left[x < -\frac{1}{2} \vee x > \frac{4}{5}\right]$

130 $20x^2 - 14x + 3 < 0$ [impossibile]

131 $x^2 - 8x + 18 < 0$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

132 $2x^2 + 5x - 3 \ge 0$ $\left[x \le -3 \vee x \ge \frac{1}{2}\right]$

133 $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 < 0$ $[\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2}]$

134 $7x^2 - 16x + 9 > 0$ $\left[x < 1 \vee x > \frac{9}{7}\right]$

PIT STOP 5 DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO IN PIÙ

Vuoi vedere subito se il passaggio è giusto o sbagliato?
Vai sul Tutor e fai l'esercitazione con il Checker.

TUTOR matematica **http://su.zanichelli.it/tutor**
risorsa riservata a chi ha acquistato l'edizione con Tutor

135 $-24x^2 < 0$ $[x \ne 0]$

136 $2x^2 + \sqrt{5}x - 5 < 0$ $\left[-\sqrt{5} < x < \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$

137 $-\frac{9}{2}x^2 + 34x + 16 < 0$ $\left[x < -\frac{4}{9} \vee x > 8\right]$

138 $4x^2 + 32x + 39 \le 0$ $\left[-\frac{13}{2} \le x \le -\frac{3}{2}\right]$

139 $-\frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{2}x + 7 < 0$ $\left[x < -\frac{14}{3} \vee x > 1\right]$

140 $4x^2 + 5x - \frac{3}{2} > 0$ $\left[x < -\frac{3}{2} \vee x > \frac{1}{4}\right]$

141 $\frac{x^2}{3} - 2x - 24 \ge 0$ $[x \le -6 \vee x \ge 12]$

142 $3x^2 - 3 + \frac{\sqrt{6}}{2}x \le 0$ $\left[-\frac{\sqrt{6}}{2} \le x \le \frac{\sqrt{6}}{3}\right]$

143 $-33x^2 + 6x - 2 > 0$ [impossibile]

144 $1 + x^2 > -1$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

145 $x^2 - \frac{13}{3}x > \frac{38}{3}$ $\left[x < -2 \vee x > \frac{19}{3}\right]$

ESERCIZI

432 ★ $\dfrac{2}{x-3}+\dfrac{6x}{2+x}<6$ $\quad[-2<x<3 \vee x>4]$

433 ★ $\dfrac{6x+9}{(2x+3)^2}\geq\dfrac{2}{2x+3}$ $\quad\left[x>-\frac{3}{2}\right]$

434 ★ $\dfrac{4x^2-28x+49}{x-5}+5-x\leq 0$ $\quad[x\leq 2 \vee 4\leq x<5]$

435 ★ $\dfrac{2x-5}{x-1}-\dfrac{4-5x}{(x-1)^2}>1$ $\quad[x\neq 0 \wedge x\neq 1]$

436 ★ $\dfrac{x+2}{5x}-\dfrac{x^2-1}{x(x-4)}\geq\dfrac{1}{x-4}$ $\quad\left[-1\leq x\leq-\frac{3}{4} \vee 0<x<4\right]$

437 ★ $\dfrac{x-1}{x^2+2x-3}\leq x-3-\dfrac{3}{x+3}$ $\quad[-\sqrt{13}\leq x\leq-3 \vee x\geq\sqrt{13}]$

438 ★ $\dfrac{30}{5x-15}+7<\dfrac{5}{x+3}$ $\quad\left[-3<x<-\frac{15}{7} \vee 2<x<3\right]$

439 ★ $\dfrac{2}{x^2+2}>\dfrac{1}{x}$ $\quad[x<0]$

440 ★ $\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}-3>0$ $\quad\left[-1<x<0 \vee 0<x<\frac{1}{3}\right]$

441 ★ $\dfrac{x^2-6x}{x^2-3x+2}\geq 1$ $\quad\left[x\leq-\frac{2}{3} \vee 1<x<2\right]$

442 ★ $\dfrac{1}{x+1}<x-1$ $\quad[-\sqrt{2}<x<-1 \vee x>\sqrt{2}]$

443 ★ $\dfrac{x}{x+2}+\dfrac{4}{x-2}+\dfrac{8}{4-x^2}>0$ $\quad[x<-2 \vee -2<x<0 \vee x>2]$

444 ★ $\dfrac{x^2-2}{x^2+4x+4}\geq 1$ $\quad\left[x\leq-\frac{3}{2} \wedge x\neq-2\right]$

445 ★ $\dfrac{x^2-1}{x^2-9}+\dfrac{x+2}{x+3}\leq 1$ $\quad[-3<x<3]$

446 ★ $\dfrac{x-3}{x^2-2x}+\dfrac{3}{2-x}\geq 1$ $\quad[0<x<2]$

447 ★ $\dfrac{5}{2x}+\dfrac{5}{3x}-\dfrac{x}{6}\leq 0$ $\quad[-5\leq x<0 \vee x\geq 5]$

448 ★ $\dfrac{2x-1}{x^2-4}>1$ $\quad[-2<x<-1 \vee 2<x<3]$

449 ★ $\dfrac{5x-2}{x^2-4x}-\dfrac{3}{x}\geq\dfrac{1}{4-x}$ $\quad\left[-\frac{10}{3}\leq x<0 \vee x>4\right]$

450 ★ $\dfrac{x^2+6x+9}{x^2+8x+15}<1$ $\quad[x>-5 \wedge x\neq-3]$

451 ★ $\dfrac{3x+1}{x^2+4}-3<0$ $\quad[\forall x\in\mathbb{R}]$

452 ★ $\dfrac{1}{4b^2}-\dfrac{3}{b}+9\leq 0$ $\quad\left[b=\frac{1}{6}\right]$

453 ★ $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2+x}+\dfrac{3x}{x+1}\leq 0$ $\quad[-1<x<0]$

454 ★ $\dfrac{3x^2+x-10}{x^2-9}<1$ $\quad\left[-3<x<-1 \vee \frac{1}{2}<x<3\right]$

455 ★ **AL VOLO** $\dfrac{(x+1)^2}{4+x^2}>-\dfrac{1}{x^2+9}$

456 ★ $\dfrac{2+y^2}{y^4+3}>1$ $\quad$[impossibile]

457 ★ $\dfrac{x^2+1}{x+5}-\dfrac{2x^3-3(1+x^2)}{x^2+6x+5}\leq\dfrac{x-1}{x+1}$ $\quad[-5<x<-1 \vee x\geq 3]$

458 ★ $\dfrac{2x+4}{x^2-25}>\dfrac{2}{x+5}\left(1-\dfrac{3}{x+5}\right)-\dfrac{x+2}{x-5}$ $\quad[x<-2 \vee x>5 \wedge x\neq 5]$

459 ★ $\dfrac{x+4}{2x^2}+\dfrac{x-5}{3x^2-6x}<\dfrac{2x+1}{2x^2-4x}$ $\quad[x>2]$

460 ★ $\dfrac{2}{2x-x^2}-\dfrac{1}{x^2-4x+4}\geq\dfrac{3}{6-3x}$ $\quad[0<x\leq 1 \vee x\geq 4]$

461 ★ $\dfrac{2}{x^2-4}+\dfrac{3}{x^2+2x}\leq\dfrac{x-3}{x(x-2)}$ $\quad[-2<x<0 \vee 0<x<2 \vee x\geq 6]$

462 ★ $\dfrac{3}{2x^2+8x}-\dfrac{x^2}{4x+16}+\dfrac{x}{4}\leq-1$ $\quad\left[-4<x\leq-\frac{3}{2} \vee -\frac{1}{2}\leq x<0\right]$

463 ★ $\dfrac{x^2+1}{x^2-5x-6}>\dfrac{x-2}{2x-12}+\dfrac{1}{2}$ $\quad\left[-\frac{5}{3}<x<-1 \vee x>6\right]$

464 ★★ $\dfrac{1-x}{2x^2+3x}\leq\dfrac{3}{x-5}-\dfrac{3x^2+1}{2x^3-7x^2-15x}$ $\quad\left[-\frac{3}{2}<x<0 \vee x>5\right]$

465 ★★ $\dfrac{x-3}{x-1}-\dfrac{x+1}{2x+3}\geq\dfrac{5x-23}{2x^2+x-3}$ $\quad\left[x<-\frac{3}{2} \vee 1<x\leq 3 \vee x\geq 5\right]$

466 ★★ $\dfrac{x+2}{x^2+6x+9}+\dfrac{12}{x^3+9x^2+27x+27}\leq\dfrac{2}{x+3}$ $\quad[-7\leq x<-3 \vee x\geq 0]$

b. $|2x - x^2| - 8 = 0 \rightarrow |2x - x^2| = 8 \rightarrow 2x - x^2 = \pm 8$

equazione del tipo $|A(x)| = k$, con $k > 0 \rightarrow A(x) = \pm k$

Risolviamo separatamente i due casi.

1. $2x - x^2 = 8, \quad x^2 - 2x + 8 = 0, \quad \frac{\Delta}{4} = 1 - 8 = -7 < 0 \rightarrow$ nessuna soluzione.

2. $2x - x^2 = -8, \quad x^2 - 2x - 8 = 0, \quad \frac{\Delta}{4} = 1 + 8 = 9 \rightarrow x = 1 \pm 3 = \begin{cases} x_1 = -2, \\ x_2 = 4. \end{cases}$

L'equazione ha le soluzioni -2 e 4.

ESERCIZI

Risolvi le seguenti equazioni.

317 $3 - |x^2 - 2| = 1$ $\quad [0; \pm 2]$

318 $|x^2 - 4x| - 5 = 0$ $\quad [-1; 5]$

319 $3 + |2x^2 + 9x| = -15$ $\quad$ [impossibile]

320 $4 - |25x^2 - 5| = 0$ $\quad \left[\pm\frac{1}{5}; \pm\frac{3}{5}\right]$

321 $|3x^2 + 5x| - 6 = 6$ $\quad \left[-3; \frac{4}{3}\right]$

322 $3 - |7x^2 + 8x| = 4$ $\quad$ [impossibile]

323 $5 + |12x^2 + 4x| = 6$ $\quad \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{6}\right]$

324 $|3x^2 - 13x| = 10$ $\quad \left[-\frac{2}{3}; 1; \frac{10}{3}; 5\right]$

325 $16 - |-x^2 + 9x + 6| = 0$ $\quad \left[\frac{9 \pm \sqrt{41}}{2}; -2; 11\right]$

326 $|x^4 - 3x^2 - 1| - 3 = 0$ $\quad [\pm 1; \pm\sqrt{2}; \pm 2]$

327 $1 - |x^5 - 18| = 2$ $\quad$ [impossibile]

328 $|x^4 - 10| - 6 = 0$ $\quad [\pm\sqrt{2}; \pm 2]$

329 $|x^3 - 7x - 3| = 3$ $\quad [\pm\sqrt{7}; -2; -1; 0; 3]$

330 $\left|\frac{x-5}{3x-1}\right| - 1 = 0$ $\quad$ [−

IN 3 PASSI

1. Scrivi le C.E. della frazione.
2. Poni l'equazione nella forma $|A(x)| = k$, $k > 0$.
3. Risolvi le due equazioni fratte $A(x) =$ $A(x) = -k$, ricordando di verificare se le luzioni trovate sono accettabili per le C.E.

331 $-\left|6 - \frac{9}{x-2}\right| + 3 = 0$ $\quad$ [

332 $\left|\frac{x^2+1}{6-x} + 1\right| + 5 = 3$ $\quad$ [impossib

333 $4 - \left|x - \frac{3x-9}{x+1}\right| = 0$ $\quad$ [1

334 $\frac{6}{|x^2 - x - 6|} - 1 = 0$ $\quad$ [−3; 0; 1

335 $1 - |x^4 + x^2 - 1| = 0$ $\quad$ [0; ±

336 $|25x^4 + 16x^2| = 9$ $\quad$ [±

337 **TEST** Data l'equazione $|x + 5| = k$, con $k \in \mathbb{R}$, possiamo dire che:

A se $k < 0$, ammette una soluzione negativa.

B se $k > 0$, ammette due soluzioni positive.

C se $k > 5$, ammette due soluzioni positive.

D se $k = 0$, ammette una sola soluzione.

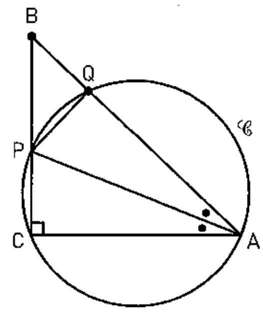
Trova le soluzioni delle seguenti equazioni al variare del parametro reale *k*.

338 $|5x + k| = k + 3$ $\quad \left[k < -3\text{: impossibile; } k \geq -3\text{: } \frac{3}{5} \vee -\frac{2k+3}{5}\right]$

339 $|kx - 3k| = k - 2$ $\quad \left[k < 2\text{: impossibile; } k \geq 2\text{: } \frac{4k-2}{k} \vee \frac{2k+2}{k}\right]$

DIMOSTRAZIONE GUIDATA

BC è un triangolo rettangolo in C. Conduciamo la bisettrice dell'angolo $\widehat{A}$, che interseca il cateto opposto in e tracciamo la circonferenza $\mathscr{C}$ di diametro AP che interseca l'ipotenusa in Q. Dimostra che la circonferenza assa per il vertice C e che $PQ \cong PC$.



otesi: ABC rettangolo in C; $B\widehat{A}P \cong$ ____; AP diametro.

Tesi: $C \in \mathscr{C}$; ____ $\cong PC$.

DIMOSTRAZIONE

ACP è rettangolo per ipotesi e l'ipotenusa AP è un diametro. Quindi $A\widehat{C}P$ insiste sulla semicirconferenza $\widehat{PQA}$ e allora il punto ____ appartiene alla circonferenza $\mathscr{C}$.

I triangoli PCA e ____ sono rettangoli in quanto gli angoli $P\widehat{C}A$ e $P\widehat{Q}A$ insistono su semicirconferenze di diametro AP. I triangoli hanno:

- ____ $\cong C\widehat{A}P$ perché PA è bisettrice di $C\widehat{A}Q$;
- ____ in comune.

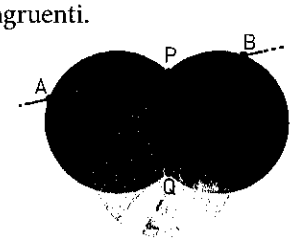
Quindi $PCA \cong PQA$ per il ____ criterio di congruenza dei triangoli rettangoli. In particolare: $PQ \cong$ ____.

166 Data una circonferenza, da un punto esterno P, traccia una tangente e una secante. Chiama T il punto di tangenza, Q e R quelli di intersezione della secante, con Q più vicino a P. Dimostra che $P\widehat{Q}T \cong R\widehat{T}P$.

167 Da un punto P di una circonferenza di diametro AB, traccia la corda PQ perpendicolare ad AB. Chiama P' il secondo estremo del diametro passante per P e dimostra che $P'Q$ è parallelo ad AB.

168 ABC è un triangolo isoscele di vertice A. La circonferenza di diametro AB interseca la base BC in P. Dimostra che $B\widehat{A}P \cong P\widehat{A}C$.

169 Dimostra che $AQ \cong BQ$, sapendo che i cerchi sono congruenti.



170 $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ sono circonferenze tangenti internamente nel punto P. Detto PQ il diametro della circonferenza più esterna $\mathscr{C}$, conduci da Q la tangente QA a $\mathscr{C}'$ che interseca $\mathscr{C}$ in B. Dimostra che $B\widehat{P}A \cong A\widehat{P}Q$.

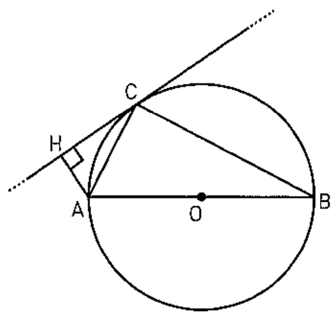
171 $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ sono circonferenze rispettivamente di centri C e C', tangenti internamente nel punto P e tali che $C \in \mathscr{C}'$. Conduci da P una retta che interseca $\mathscr{C}'$ in A e $\mathscr{C}$ in B. Dimostra che $PA \cong \frac{1}{2}PB$.

172 $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ sono due circonferenze congruenti secanti nei punti A e B. Conduci per il punto A la tangente alla circonferenza $\mathscr{C}$, secante $\mathscr{C}'$ in D. Dimostra che il triangolo DBA è isoscele.

IN 2 PASSI

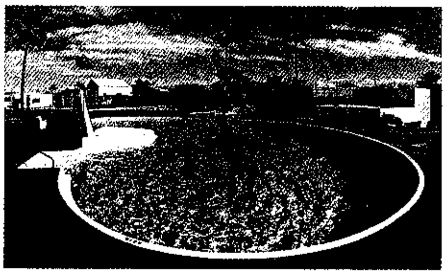
1. Dimostra che gli angoli alla circonferenza $B\widehat{A}D$ e $A\widehat{D}B$ insistono su archi congruenti.
2. Deduci che $B\widehat{A}D \cong A\widehat{D}B$ e concludi.

173 Nella figura, HC è tangente alla circonferenza e AH è perpendicolare a HC. Utilizzando le proprietà degli angoli alla circonferenza, dimostra che AC è bisettrice di $H\widehat{A}B$.



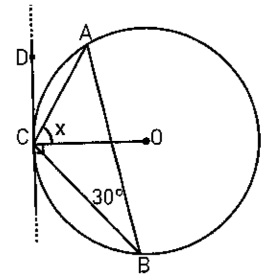
ESERCIZI

186 ★ **INTORNO A NOI** Claudia è sul bordo di una piscina circolare. Si tuffa e nuota verso est per 10 metri, tocca il bordo, poi nuota verso sud per 24 metri e tocca di nuovo il bordo. Qual è il raggio della piscina? [13 m]



COME SI FA

▶ **Determiniamo l'angolo indicato con la lettera x nella figura.**



Gli angoli $A\widehat{C}D$ e $A\widehat{B}C$ sono entrambi angoli alla circonferenza che insistono sull'arco $\overset{\frown}{AC}$, quindi sono congruenti:

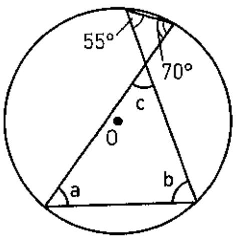
$$A\widehat{C}D = A\widehat{B}C = 30°.$$

Poiché C è punto di tangenza, $O\widehat{C}D$ è un angolo retto e quindi abbiamo:

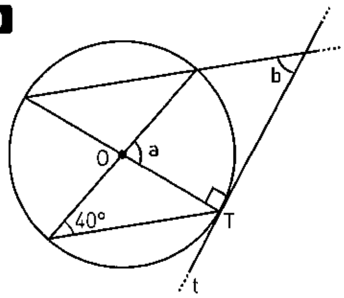
$$x = 90° - A\widehat{C}D = 90° - 30° = 60°.$$

Determina gli angoli indicati con le lettere *a*, *b*, *c* e *x* nelle seguenti figure.

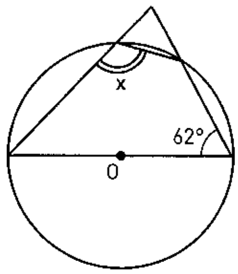
187 ★



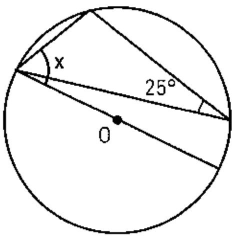
190 ★



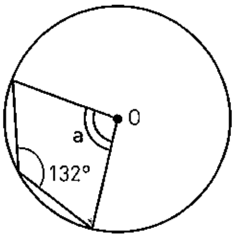
193 ★



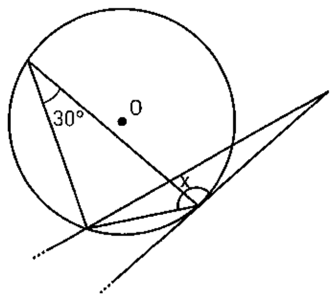
188 ★



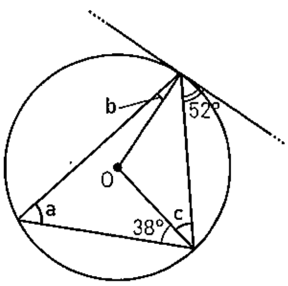
191 ★



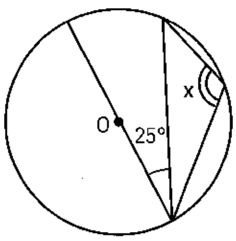
194 ★



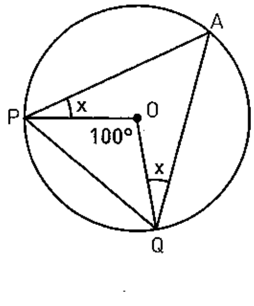
189 ★



192 ★



195 ★



10 ★ Dai punti P e Q di una circonferenza conduci, nello stesso semipiano, due corde congruenti PA e QB. Dimostra che $A\widehat{P}Q \cong B\widehat{Q}P$.

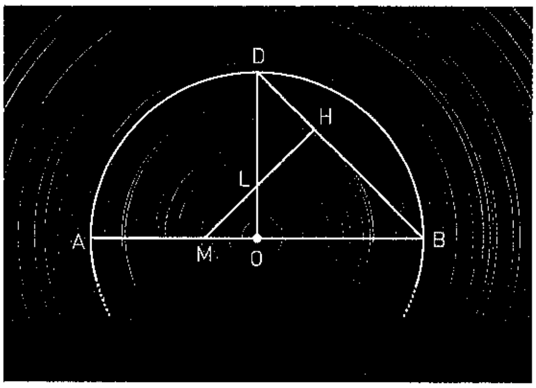
11 ★★ Nel triangolo rettangolo ABC, il punto medio dell'ipotenusa AB è M e la circonferenza di diametro CM interseca AC in P e CB in Q. Dimostra che $PQ \parallel AB$.

12 ★ $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ sono due circonferenze concentriche con i raggi uno doppio dell'altro. Da un punto P della circonferenza di raggio maggiore conduci le tangenti all'altra circonferenza e dimostra che il triangolo formato dal punto P e dai punti di tangenza è equilatero.

13 ★ Sia ABC un triangolo rettangolo isoscele di vertice C. Dimostra che la semicirconferenza di diametro AC è divisa dall'ipotenusa AB in due archi congruenti.

14 ★ Sulla circonferenza di centro O considera i punti A, B e C, vertici di un triangolo equilatero. Detto P il punto di intersezione tra la circonferenza e la retta AO, dimostra che il triangolo OPC è equilatero.

15 ★ Nella figura, M è un punto qualsiasi del raggio AO e MH è perpendicolare alla corda BD. Dimostra che il triangolo MOL è isoscele.



16 ★★ In una circonferenza di centro O traccia una corda AB e la tangente t in B. Considera su t un punto C tale che $AB \cong BC$ e, detto D l'ulteriore punto di intersezione del segmento AC con la circonferenza, dimostra che:

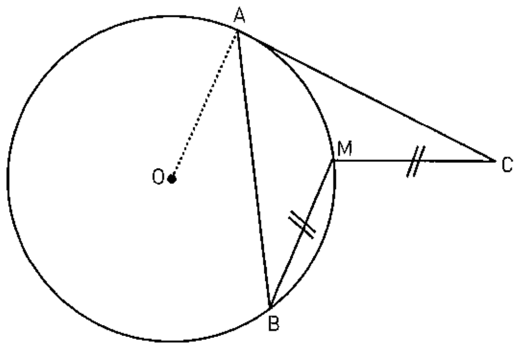
a. il triangolo DBC è isoscele;

b. $A\widehat{D}B \cong 2D\widehat{A}B$.

17 ★★ Sulla corda AB di una circonferenza fissa due punti P e Q equidistanti dal punto medio di AB e conduci, per tali punti, le perpendicolari r e s alla corda stessa. Detti C e D i punti di intersezione di r e s con il minore dei due archi $\overset{\frown}{AB}$, dimostra che il quadrilatero $PQDC$ è un rettangolo.

18 ★★ $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ sono due circonferenze concentriche di centro C. Da un punto A appartenente alla circonferenza più esterna conduci le tangenti alla circonferenza interna e chiama P, Q i punti di tangenza e R, S i punti di intersezione delle stesse rette con la circonferenza esterna. Dimostra che il quadrilatero $PRSQ$ è un trapezio isoscele.

19 ★★ Nella figura, M è il punto medio dell'arco $\overset{\frown}{AB}$, la retta AC è tangente in A alla circonferenza e $MB \cong MC$. Dimostra che il triangolo ABC è isoscele.



20 ★★ Date due circonferenze congruenti di centri C e C', tangenti esternamente in P, considera le corde AP e $A'P$ appartenenti, rispettivamente, alla prima e alla seconda circonferenza, tali che $A\widehat{P}A' = 90°$. Dimostra che i raggi AC e $A'C'$ sono paralleli.

21 ★★ Sia ABC un triangolo inscritto in una semicirconferenza di diametro AB. Detto P il punto di intersezione tra le bisettrici degli angoli $C\widehat{A}B$ e $A\widehat{B}C$ e detto Q il punto di intersezione tra la bisettrice di $C\widehat{A}B$ e la circonferenza, dimostra che il triangolo PBQ è rettangolo isoscele.

22 ★★ $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ sono due circonferenze secanti nei punti A e B. Conduci per il punto A la tangente alla circonferenza $\mathscr{C}$, secante $\mathscr{C}'$ in D, e la tangente alla circonferenza $\mathscr{C}'$, secante $\mathscr{C}$ in G. Dimostra che $G\widehat{A}D \cong B\widehat{G}A + B\widehat{D}A$.

PER LA VERIFICA